# MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Prof. Eduardo Jupi

Unicesumar
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

# CONJUNTOS

- **O que é conjunto**

Frequentemente usamos a noção de conjunto. O principal exemplo de conjunto são os conjuntos numéricos, que através da necessidade de contar ou quantificar as coisas ou objetos, foram adquirindo características próprias que os diferem. Os componentes de um conjunto são chamados de elementos. Costuma-se representar um conjunto nomeando os elementos um a um, colocando-os entre chaves e separando-os por vírgula, chamada representação por extensão. Para nomear um conjunto, usamos geralmente uma letra maiúscula.

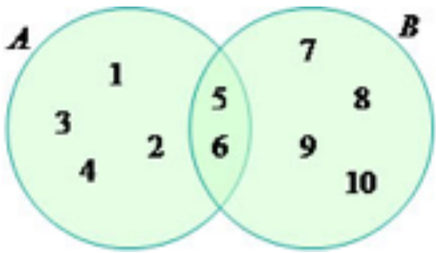
**Exemplos:**

$$A=\{1,2,3,4,5\} \rightarrow \textit{conjunto finito}$$

$$B=\{1,2,3,4,5,...\} \rightarrow \textit{conjunto infinito}$$



Também podemos representar um conjunto por meio de uma figura chamada *diagrama de Venn*:




*Quando é dada uma propriedade característica dos elementos de um conjunto, dizemos que ele está representado por compreensão. **Veja:**

$$A=\{x|x \text{ é um múltiplo de dois maior que zero}\}$$

- **Igualdade de conjuntos**

Observe que, se A é o conjunto das vogais da palavra livro e $B=\{i,o\}$, os conjuntos A e B têm exatamente os mesmos elementos. Nesse caso, dizemos que A e B são iguais (indica-se: A = B).

A negação da igualdade é indicada por $A \neq B$, A é diferente de B, e significa que um desses conjuntos possui algum elemento que não pertence ao outro.

Para indicar a pertinência de um determinado elemento sobre um conjunto, utilizamos o símbolo ∈ *(pertence)* e ∉ *(não pertence)*.

**Por exemplo:**

> $i \in A$*, i pertence a A.*

> $w \notin A$*, w não pertence a A.*

- **Igualdade de conjuntos**

Em inúmeras situações, é importante estabelecer o conjunto U ao qual pertencem os elementos de todos os conjuntos considerados. Esse conjunto é chamado de conjunto universo. Assim:

> *Quando estudamos a geometria plana, o conjunto universo é formado por todos os pontos de um dado plano.*

> *Quando estudamos a população humana, o conjunto universo é constituído de todos os seres humanos.*

Para descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica p de seus elementos, devemos mencionar, de modo explícito ou não, o conjunto universo U no qual estamos trabalhando:

$$A=\{x \in \mathbb{R} \mid x>2\}, \text{ onde } U=\mathbb{R} \rightarrow \textit{forma explícita}$$

$$A=\{x \mid x>2\} \rightarrow \textit{forma implícita}$$

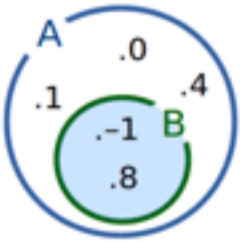
- **Conjunto vazio**

Chama-se conjunto vazio aquele que não possui elemento. Veja:

Seja A o conjunto dos números primos menores que 2. Mas esse conjunto não possui elemento, pois não há número primo menor que 2. Logo, representamos o conjunto A por $\{\ \}$ *ou* $\emptyset$.

- **Subconjuntos**

Dizemos que B é um subconjunto de A se, e somente se, todos os elementos de B pertencem a A.




Note que $A=\{-1,0,1,4,8\}$ e $B=\{-1,8\}$, ou seja, todos os elementos de B também são elementos do conjunto A.

Nesse caso, dizemos que B está contido em A ou B é subconjunto de A $(B \subset A)$.

Podemos dizer também que A contém B $(A \supset B)$.

**Observações:**

*Se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$, *então* $A = B$.

*Os símbolos* $\subset$ *(contido),* $\supset$ *(contém),* $\not\subset$ *(não está contido) e* $\not\supset$ *(não contém) são utilizados para relacionar conjuntos.*

*Para todo conjunto A, tem-se* $A \subset A$.

*Para todo conjunto A, tem-se* $\emptyset \subset A$, *onde* $\emptyset$ *representa o conjunto vazio.*

**Exercício resolvido**

Considere o conjunto $A=\{x \in U \mid x \text{ satisfaz } p\}$. Sobre $A$, podemos afirmar:

**a)** Se $x \in U$ então $x \in A$

**b)** Se $x \notin A$ então $x \notin U$

**c)** Se $x$ não satisfaz $p$ então $x \notin A$

**d)** $U \subset A$

**Resolução:**

Observe que a simbologia utilizada significa que, para que um elemento $x$ pertença ao conjunto $A$, ele deve pertencer ao conjunto universo $U$ e satisfazer a propriedade $p$.

**Letra C**. Basta interpretar a frase acima, se $x$ não satisfaz a condição $p$ ele nunca irá pertencer a $A$.



**Exercício resolvido.**

Considere o conjunto $A = \{1, 2, \{3\}\}$ e assinale a alternativa que contém um subconjunto de $A$.

**a)** $\{3\}$

**b)** $\{1, 3\}$

**c)** $\{2, 3\}$

**d)** $\{4, \{3\}\}$

**e)** $\{\{3\}\}$

**Resolução:**

Um subconjunto de $A$ é um conjunto que só contém elementos de $A$.

A dificuldade está em saber que o número $3$ não é um elemento de A, e sim, o conjunto $\{3\}$. Assim descartamos as **letras a,b** e **c**.

Claramente o $4$ não pertence a A, logo descartamos também a **letra d**.

Nos resta a **letra e**, que como vimos, $\{3\}$ pertence a A, logo $\{\{3\}\}$ é subconjunto de $A$.

- **União de conjuntos**

Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos e $U$ o conjunto universo o qual os elementos de A e B obedecem a tal característica, a união de $A$ e $B$, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos $x \in U$, sendo $x$ elementos um dos dois conjuntos $A$ ou $B$. Simbolicamente,

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- **Interseção de conjuntos**

A interseção de $A$ e $B$, denotada por $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos $x$, com $x$ pertencendo a ambos os conjuntos $A$ e $B$. Simbolicamente,

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}.$$



A igualdade de conjuntos nos garante a unicidade desses conjuntos. De acordo com essa definição, temos as seguintes equivalências lógicas:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

e

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B)$$

- **Conjuntos disjuntos**

Se dois conjuntos não possuem elementos em comum, diremos que eles são disjuntos. Simbolicamente, escreveremos $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, a união dos conjuntos A e B é denominada união disjunta. O número de elementos $A \cap B$ nesse caso é igual a zero.

$$n(A \cap B) = 0$$

**Exemplos:**

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 5, 6, 3\}$, $C = \{2, 4, 7, 8, 9\}$ e $D = \{10, 20\}$. Temos:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B \cup A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A \cap B = \{1,3,5\}$

$B \cap A = \{1,3,5\}$

$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A \cap D = \emptyset$

Note que $A$, $B$ e $C$ são todos disjuntos com $D$, mas $A$, $B$ e $C$ não são dois a dois disjuntos.

- **Diferença e complemento de um conjunto**

Dados dois conjuntos A e B, a diferença entre A e B, denotada por A \ B, é o conjunto formado por elementos que pertencem a A, mas que não pertencem a B. Simbolicamente, escrevemos:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Quando $B \subset A$, diremos que a diferença $A \setminus B$ é o complemento de $B$ em relação a $A$, denotado por $\complement_A B$.

**Exercício resolvido**

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, determine o conjunto $A - B$.

**a)** $\{\ \}$

**b)** $\{1, 5\}$

**c)** $\{5\}$

**d)** $\{1\}$

**e)** $\{2, 3\}$

**Resolução:**

O conjunto $A - B$ é formado pelos elementos que pertencem a $A$ e não pertencem a $B$, ou seja, $A - B = \{1\}$.

**Exercício resolvido**

Considerando o conjunto universo $U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e os conjuntos não-vazios $A$ e $B$, subconjuntos de $U$, tais que $B \subset A$, $A \cup B = \{6, 8, 10\}$ e $A \cap B = \{8\}$, pode-se afirmar, **CORRETAMENTE**, que $A$ é:

**a)** $\{6,8,10\}$

**b)** $\{4,6\}$

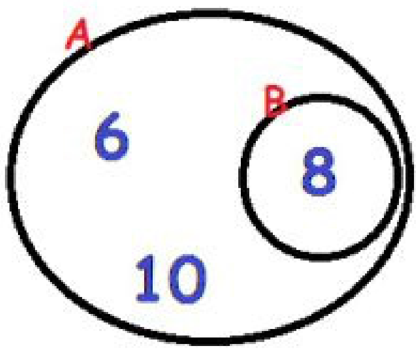
**c)** $\{4,6,8\}$

**d)** $\{2,6,10\}$

**e)** $\{6,8\}$



**Resolução:**




Basta observar o desenho que atende as informações apresentadas.

$A = \{6, 8, 10\}$

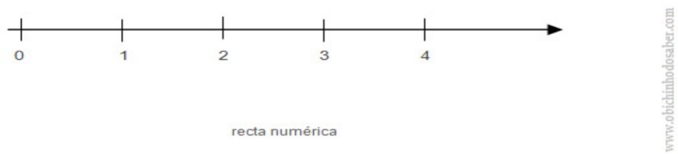
## CONJUNTOS NUMÉRICOS

- **Conjunto dos números naturais**

Começando por zero e acrescentando sempre uma unidade, obtemos os elementos do conjunto dos números naturais que é indicado pela letra $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,...\}$

Para representar graficamente o conjunto $\mathbb{N}$, usamos uma semirreta, chamada de reta numérica dos números naturais:




Todo número natural $n$ tem o seu sucessor $n + 1$. Por exemplo, o sucessor de $10$ é $11$, o sucessor de $x$ é $x + 1$.

O número natural que vem imediatamente antes de um número natural diferente de zero é denominado antecessor. Por exemplo, o antecessor de $10$ é $9$.

Dois ou mais números naturais que se seguem são denominados consecutivos. Por exemplo, $2$ e $3$ são consecutivos, assim como $20, 21, 22$ e $23$ são consecutivos.

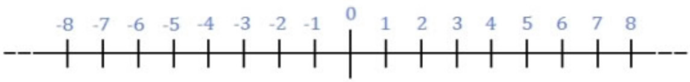
*Quando o símbolo asterisco aparecer junto à letra que simboliza um conjunto, significa que o zero foi excluído de tal conjunto. Desse modo, $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,4,5,...\}=\mathbb{N}-\{0\}$. Note que $\mathbb{N}^{*} \subset N$.

- **Conjunto dos números inteiros**

A partir de cada número natural diferente de zero e utilizando os símbolos + e -, obtemos, respectivamente, um número inteiro positivo e um número inteiro negativo. O conjunto formado por esses números e pelo zero é denominado conjunto dos inteiros, e representado pela letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$$

**Representação gráfica:**






O número inteiro é sempre menor que o número inteiro que está a sua direita na reta numérica:

$-4<-1$ ($-4$ *é menor que* $-1$)

$-2<0$ ($-2$ *é menor que* $0$)

$3>-3$ ($3$ *é maior que* $-3$)

O antecessor de -15 é -16

O sucessor de -7 é -6

$\mathbb{Z}^*=\{\dots,-2,-1,1,2,3,\dots\}$

$\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,3,\dots\}$ *inteiros não negativos*

$\mathbb{Z}_-=\{\dots,-3,-2,-1,0\}$ *inteiros não positivos*

- **Conjunto dos números racionais**

Os números que podem ser expressos sob a forma $\frac{a}{b}$, sendo $a$ e $b$ números inteiros e $b\neq 0$, são denominados números racionais, representado pela letra $\boldsymbol{Q}$.

$$\boldsymbol{Q}=\{x \mid x=a/b, \text{ com } a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z} \text{ e } b\neq 0\}$$

**Exemplos:**

$$0{,}444\ldots = \frac{4}{9};$$

$$0{,}25 = \frac{1}{4};$$

$$-\frac{9}{2} = \frac{-9}{2} = \frac{9}{-2};$$

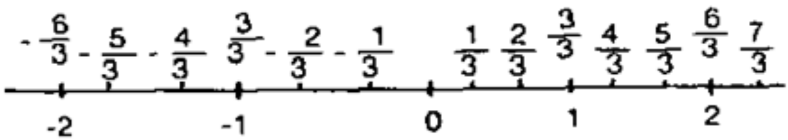
$$13\% = \frac{13}{100}$$

Os números inteiros também são racionais, pois podem ser expressos por uma fração de denominador 1.

Exemplo: $7=\frac{7}{1}$

Quando dividimos o numerador pelo denominador, podemos obter:

- Um decimal exato, isto é, um número que tem uma representação finita;
- Uma dízima periódica, isto é, um número decimal que tem uma representação infinita e periódica.
- Todos esses números, fracionários, decimais exatos, dízimas periódicas e inteiros formam o conjunto dos números racionais.




- **Conjunto dos números irracionais**

Número irracional é o número que tem uma representação decimal infinita e não periódica, representado pela letra ||$\mathbb{R}$. Exemplos:

$$\sqrt{5}=2{,}236067978\ldots$$

$$\sqrt{6}=2{,}449489742\ldots$$

$$\pi=3{,}141592\ldots$$

$$e=2{,}718281828\ldots$$

As raízes quadradas dos números naturais que são quadrados perfeitos *(0, 1, 4, 9, 16, ...)* são números naturais.

$$\sqrt{0}=0$$

$$\sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{4}=2$$

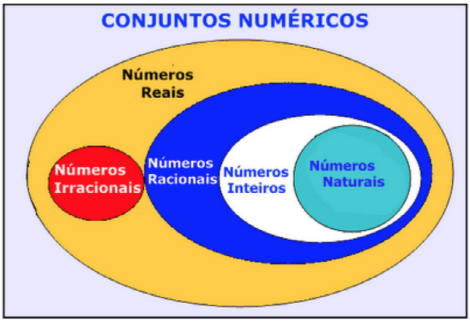
$$\sqrt{49}=7$$

As raízes quadradas dos números naturais que não são quadrados perfeitos são números irracionais.

- **Conjuntos dos números reais**

A reunião dos números racionais com os números irracionais forma o conjunto dos números reais, representado pela letra $\mathbb{R}$.






**Exercício resolvido**

Leia as afirmações a seguir:

**I.** Os números naturais são aqueles inteiros não positivos mais o zero.

**II.** Os números irracionais são aqueles que representam dízimas periódicas.

**III.** Os números reais representam a soma dos números racionais com os irracionais.

Assinale a alternativa correta:

**a)** Somente a assertiva II está correta.

**b)** Somente a assertiva III está correta.

**c)** Somente a assertiva I está correta.

**d)** Somente as assertivas II e III estão corretas.

**Resolução:**

**I.** Falsa – São os positivos.

**II.** Falsa – Os irracionais não são dízimas periódicas.

**III. Correto – Os reais são formados da união dos irracionais com os racionais.**



**Exercício resolvido**

Dados os conjuntos:

A = $\{x \in R \, / \, 1 \leq x < 10\}$

B = $\{x \in R \, / \, (x+1)(x-6) < 0\}$

C = $\{z \in R \, / \, z^2 = 6z\}$

O conjunto $A \cap (C \cup B)$ é:

**a)** $(-1, 7)$

**b)** $\{3\} \cup (5, 7)$

**c)** $\{0, 3\}$

**d)** $(5, 7)$

**e)** $[1, 6]$

**Resolução:**

O conjunto A é formado pelos números reais maiores ou iguais a 1 e menores que 10.

O conjunto B é formado pelos valores de x que fazem $(x+1).(x-6) < 0$. Resolvendo:

$x^2 - 6x + x - 6 < 0$

$x^2 - 5x - 6 < 0$

Vamos resolver a equação $x^2 - 5x - 6 = 0$

Utilizando o método da soma e produto:

Soma = -b/c = 5/1 = 5

Produto = c/a = -6/1 = -6



A solução é o conjunto composto pelo par de números cuja soma é 5 e o produto é -6.

Obviamente, os números que satisfazem são -1 e 6.

Se analisarmos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x - 6$, temos uma parábola com cavidade para cima $(a > 0)$ e com raízes -1 e 6, logo, o conjunto B é formado pelos números reais maiores que -1 e menores que 6.

O conjunto C é formado pelos valores de z que fazem $z^2 = 6z$, ou seja, $z = 6$.

Assim:

A = $[1, 10[$

B = $]-1, 6[$

C = $\{6\}$

Logo, $A \cap (C \cup B) = [1, 10[ \cap ]-1, 6] = [1, 6]$.

## MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC) E MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

- **MMC**

Os cálculos de MMC e MDC estão ligados aos múltiplos e aos divisores de um número. Esse tipo de cálculo, aprendido no ensino fundamental, é essencial para resolver muitas questões e problemas. O mínimo múltiplo comum, ou MMC, de dois ou mais números inteiros é o menor múltiplo inteiro positivo comum a todos eles. Por exemplo, o MMC de 6 e 8 é o 24, e denotamos isso por MMC [6, 8] = 24. Já o MMC de 5, 6 e 8 é o 120, o que é denotado por MMC [5,6,8] = 120.

O MMC é muito útil quando se adicionam ou subtraem frações, pois é necessário um mesmo denominador comum durante esses processos. Não é necessário que esse denominador comum seja o MMC, mas a sua escolha minimiza os cálculos. Considere o exemplo:

$$\frac{5}{6}+\frac{2}{5}=\frac{25}{30}+\frac{12}{30}=\frac{37}{30};\ onde\ [6,5]=30$$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{6}{12}+\frac{16}{12}-\frac{9}{12}=\frac{13}{12},\ onde\ [2,3,4]=12$$

Para encontrar o MMC entre dois ou mais números inteiros, utilizamos o método de decomposição por fatores primos. Exemplo:

Calcular o MMC de 12 e 15;

$12=2.2.3=22.3$

$15=3.5$

$[12,15]=2^2.3.5=4.3.5=60$

O MMC de 24 e 36

$24=2.2.2.3=23.3$

$36=2.2.3.3=22.32$

$[24,36]=2^3.3^2=8.9=72$

- ### MDC

O máximo divisor comum, ou MDC, de dois ou mais números inteiros é o maior divisor inteiro comum a todos eles. Por exemplo, o M.D.C. de 16 e 36 é o 4, e denotamos isso por MDC (16, 36) = 8. Já o MDC de 30, 54 e 72 é o 6, o que é denotado por (30, 54, 72) = 6. Regra geral para calcular o MDC de dois ou mais números. O procedimento geral para o cálculo do MDC, como no caso do MMC, envolve a decomposição primária de cada número. Por exemplo, para calcular o MMC de 30, 54 e 72, fazemos o seguinte:

$30=2.3.5$

$54=2.3.3.3=2.3^3$

$72=2.2.2.3.3=2^3.3^2$, *logo*

$(30,54,72)=2.3=6$,

Multiplicamos os fatores primos comuns elevados a menor potência.

**Exercício resolvido**

Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro a cada 4 dias, o segundo a cada 6 dias e o terceiro a cada 9 dias. Se esses navios partirem juntos depois de quantos dias voltarão a sair juntos, novamente?

**Resolução**

Basta calcular o M.M.C entre 4, 6 e 9

| | |
|---|---|
| 4, 6, 9 | 2 |
| 2, 3, 9 | 2 |
| 1, 3, 9 | 3 |
| 1, 1, 3 | 3 |
| 1, 1, 1 | 36 |

**Portanto eles voltarão a sair juntos novamente depois de 36 dias.**

### Exercício resolvido

Em uma casa há quatro lâmpadas, a primeira acende a cada 27 horas, a segunda acende a cada 45 horas, a terceira acende a cada 60 horas e a quarta só acende quando as outras três estão acesas ao mesmo tempo. De quantas em quantas horas a quarta lâmpada vai acender?

**Resolução**

Basta calcular o M.M.C entre 27, 45 e 60

$$\begin{array}{rrr|l} 27, & 45, & 60 & 2 \\ 27, & 45, & 30 & 2 \\ 27, & 45, & 15 & 3 \\ 9, & 15, & 5 & 3 \\ 3, & 5, & 5 & 3 \\ 1, & 5, & 5 & 5 \\ \hline 1, & 1, & 1 & 540 \end{array}$$

**Portanto a quarta lâmpada vai acender depois de 540 horas**

### Exercício resolvido

Em uma floricultura, há menos de 65 botões de rosas, e um funcionário está encarregado de fazer ramalhetes, todos com a mesma quantidade de botões. Ao iniciar o trabalho, esse funcionário percebeu que se colocasse em cada ramalhete 3, 5 ou 12 botões de rosas, sempre sobrariam 2 botões. O número de botões de rosas era:

**a)** 54
**b)** 56
**c)** 58
**d)** 60
**e)** 62

**Resolução**

Inicialmente devemos calcular o M.M.C entre 3, 5 e 12

$$\begin{array}{r|l} 3,\ 5,\ 12 & 2 \\ 3,\ 5,\ 6 & 2 \\ 3,\ 5,\ 3 & 3 \\ 1,\ 5,\ 1 & 5 \\ \hline 1,\ 1,\ 1 & 60 \end{array}$$

Como sempre sobram 2 botões, o número de botões de rosas era 60 + 2 = 62.

**Portanto o número de botões de rosas era 62**

**Resolução:**

Calculando o MDC:



$$\begin{array}{r|l} 1120 & 2 \\ 560 & 2 \\ 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

O MDC é o produto dos primos que se repetem: 5.7 = 35.

Calculando o MMC, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1120,\ 525 & 2 \\ 560,\ 525 & 2 \\ 280,\ 525 & 2 \\ 140,\ 525 & 2 \\ 70,\ 525 & 2 \\ 35,\ 525 & 3 \\ 7,\ 175 & 5 \\ 7,\ 35 & 5 \\ 7,\ 7 & 7 \\ 1\quad 1 & \end{array}$$

2.2.2.2.2.3.5.5.7 = 16800
Daí
M – 250. D = 16800 – 250.35 = 16800 – 8750 = 8050

**Exercício resolvido**

No estoque de uma papelaria, há uma caixa com várias borrachas iguais e, para facilitar as vendas, o dono dessa papelaria decidiu fazer pacotinhos, todos com a mesma quantidade de borrachas. Ao fazer isso, notou que era possível colocar 3 ou 4 ou 5 borrachas em cada pacotinho e, assim, não sobraria borracha alguma na caixa. O menor número de borrachas que essa caixa poderia conter era:

**a)** 80

**b)** 65

**c)** 60

**d)** 70

**e)** 75



**Resolução:**

A questão fala de uma caixa com várias borrachas, onde o vendedor consegue dividir em caixas com 3, 4 ou 5 borrachas.

Estamos tratando de MMC (Mínimo Múltiplo Comum), ou seja, a quantidade de borrachas pode ser dividida por 3, 4 ou 5 e tem que ser a menor possível.

Como não existem fatores primos em comum, o MMC (3, 4, 5) = 3.4.5 = 60.

## Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC)

### > Equações do primeiro grau

Equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. A palavra equação tem o prefixo ***equa***, que em latim quer dizer "igual". Exemplos:

$3x+6=0$

$2x-4=3x+3$

$2a-b+c=0$

*Não são equações:

$4+5=3+6$, pois não é um sentença aberta

$x-3>5$, pois não é uma igualdade

$3\neq 4$, não é sentença aberta nem igualdade



Podemos representar uma equação do primeiro grau na incógnita x da seguinte forma:

$ax+b=0$, onde a e b são valores conhecidos e $a\neq 0$. A solução é apresentada por $x=\frac{b}{a}$.

### > Sistema de equações com duas incógnitas

Um sistema de equação de 1º grau com duas incógnitas é formado por duas equações de 1º grau com duas incógnitas diferentes em cada equação. Veja um exemplo:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 3x+4y=72 \end{cases}$$

Para encontramos o par ordenado solução desse sistema, podemos utilizar dois métodos para a sua resolução. Esses dois métodos são: Substituição e Adição.

## > Método da substituição

Esse método consiste em escolher uma das duas equações, isolar uma das incógnitas e substituir na outra equação. Veja como:

$$\begin{cases} x+y=20 \ (I) \\ 3x+4y=72 \ (II)' \end{cases}$$

Chamando de equação (I) e equação (II), isolando x na equação (I) temos:
(I) $x=20-y$, agora, substituindo o valor de x na equação (II):
(II) $3(20-y)+4y=72$, daí, por propriedades operativas encontramos $y=12$.
Encontrado o valor de y,voltamos na expressão de $x=20-y=20-12=8$.

Logo, o par ordenado solução para esse sistema é dado por (8; 12).

## > Método da adição

Esse método consiste em adicionar as duas equações de tal forma que a soma de uma das incógnitas seja zero. Para que isso aconteça, será preciso que multipliquemos algumas vezes as duas equações ou apenas uma equação por números inteiros para que a soma de uma das incógnitas seja zero. 21

Dado o sistema:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 3x+4y=72 \end{cases}$$

Primeiro escolhemos qual incógnita queremos anular. Nesse caso, vou escolher a incógnita y, depois multiplicamos as equações pelos coeficientes de y, o da equação (I) equação (II), e o da equação (II) na equação (I), assim:

$$\begin{cases} x+y=20 \ x(4) \\ 3x+4y=72 \ x(-1) \end{cases}$$

Como os dois são positivos, escolhe-se um para ser negativo.

Agora basta realizar a multiplicação e depois somar as equações:

$$\begin{cases} 4x+4y=80 \\ -3x-4y=-72 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$x+0y=8 \therefore x=8$

Substituindo o valor de x na equação (I):

$x+y=20 \Rightarrow 8+y= 20 \Rightarrow y=20-8 \therefore y=12$

**Exercício resolvido**

Ao somar todos os gastos da semana, Maria somou, por engano, duas vezes o valor da conta do supermercado, o que resultou num gasto total de R$ 832,00. Porém, se ela não tivesse somado nenhuma vez a conta do supermercado, o valor encontrado seria R$ 586,00. O valor correto dos gastos de Maria durante essa semana foi:



**a)** R$ 573,00

**b)** R$ 684,00

**c)** R$ 709,00

**d)** R$ 765,00

**e)** R$ 825,00

**Exercício resolvido**

Sendo x o gasto com o supermercado, podemos montar a seguinte equação do primeiro grau:

$586 + 2x = 832$

$2x = 832 - 586$

$2x = 246$

$x=\dfrac{b}{a}$

$x = 123$

*Logo,*

$586 + 123 = 709$

**Exercício resolvido**

Um eletricista comprou um rolo de fio com 50 metros de comprimento para realizar três ligações. Na primeira ligação ele utilizou 18,7 metros do fio; na 3ª ligação, utilizou 2/3 do comprimento de fio que havia utilizado para a 2ª ligação, restando ainda 2,3 m de fio no rolo. Pode-se concluir que o comprimento, em metros, de fio utilizado na 3ª ligação foi

**a)** 14,3

**b)** 13,2

**c)** 12,9

**d)** 11,6

**e)** 10,8

**Resolução:**

Seja $x$ a quantidade de fio utilizada na segunda ligação, podemos montar a seguinte equação do primeiro grau:

$$18{,}7 + x + \frac{2x}{3} + 2{,}3 = 50$$
$$x + \frac{2x}{3} = 50 - 18{,}7 - 2{,}3$$
$$\frac{3x+2x}{3} = 29$$
$$5x = 29.3$$
$$x = \frac{87}{5}$$
$$x = 17{,}4$$

Lembrando que $x$ é a quantidade utilizada na segunda ligação. A quantidade utilizada na terceira foi $2/3$ de $17{,}4$:

$$17{,}4.\frac{2}{3} = \frac{34{,}8}{3} = 11{,}6$$

### Exercícios resolvido

Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues no aroma limão foi:

**a)** 110

**b)** 120

**c)** 130

**d)** 140

**e)** 150

### Resolução:



As caixas contêm detergentes no aroma limão e no aroma coco. Representaremos suas quantidades com as variáveis L e C, respectivamente. Nós sabemos que, somando as quantidades dos dois aromas em uma caixa, teremos um total de 24 detergentes, isto é, $L + C = 24$. Sabemos ainda que cada caixa contém dois detergentes de limão a mais do que de coco, logo, $L = C + 2$. Reorganizando essa equação, teremos: $L - C = 2$.

Com as equações identificadas, podemos montar um sistema que resolveremos pelo **método da adição**:

$$\begin{cases} L + C = 24 \\ L - C = 2 \end{cases} +$$

$$2 \cdot L + 0 \cdot C = 26$$

$$2 \cdot L = 26$$

$$L = \frac{26}{2}$$

$$L = 13$$

Cada caixa continha 13 frascos de detergente aroma limão. Mas como foram estregues 10 caixas com essa mesma quantidade $(13 \cdot 10 = 130)$, o supermercado adquiriu 130 frascos de detergente aroma limão. A resposta correta é a **letra c**.

### > Equação do segundo grau

Uma equação do segundo grau na incógnita x pode ser representada por $ax^2+bx+c=0$, onde a, b e c são coeficientes reais e $a \neq 0$. Pode aparecer de forma completa, quando a, b e c são diferentes de zero, ou na forma incompleta quando b ou c ou ambos são iguais a zero.

Quando $c=0$, $ax^2+bx=0$. Para resolver equações desse tipo, basta por em evidência o fator comum:

$$x(ax+b)=0$$

Para um produto ser igual a zero, necessariamente um dos dois fatores deve ser igual a zero, assim:

ou $x=0$

ou $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

Logo, o conjunto solução é dado por $x=0$ e $x=-\frac{b}{a}$.

$ax^2+c=0$. Isolando a incógnita $x$, temos: $ax2= -c$

$$x2= -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Logo, o conjunto solução é dado por $\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}, +\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$.

$ax^2=0$

Neste caso, a única solução possível é $x=0$, ou seja, uma raiz de multiplicidade dois.

$ax^2+bx+c=0$, assim como nas equações incompletas mostradas acima, nosso objetivo aqui também é isolar o valor de $x$ a fim de encontrar a solução da equação, assim:

$ax2+bx+c=0$

$ax2+bx=0-c$

$ax2+bx=-c$

Dividindo os dois lados da igualdade por a, temos:

$$x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$$



Completando quadrados do lado esquerdo:

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

O lado esquerdo pode ser escrito comc $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$,
e, o lado direito, podemos somar as frações, onde

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Extraindo a raiz de ambos os lados, obtemos:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, isolando $x$, temos $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

Essa relação é conhecida como fórmula de Bhaskara.

Fazendo $\Delta=b^2-4ac$, podemos escrever $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Este delta "Δ" é quem nos fornece a quantidade de raízes que uma equação do segundo grau pode ter, também é chamado de discriminante.

Δ>0, duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$

Δ=0, duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$

Δ<0, não existe raiz real que satisfaça a equação.

A soma das raízes é dada por $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e o produto das raízes é dado por $x_1.x_2=\frac{c}{a}$.

**Exercício resolvido**

Determine o produto das raízes da equação $x^2 - 3x + 36 = 2x - x^2 - 14$.

**a)** 2,5

**b)** 10

**c)** 25

**d)** 100

**e)** 50

**Resolução**

Primeiramente vamos simplificá-la:

$$x^2 - 3x + 36 = 2x - x^2 - 14$$

$$x^2 - 3x + 36 - 2x + x^2 + 14 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 50 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau.

Nem precisamos resolvê-la, pois sabemos que o produto das raízes é $\frac{c}{a}$, onde:

$a = 2$

$b = -5$

$c = 50$

*Logo, produto* $= \frac{c}{a} = \frac{50}{2} = 25.$

**Exercício resolvido:**

A soma entre dois números positivos é 37. Se o produto entre eles é 330, então o valor da diferença entre o maior e o menor número é:

**a)** 7

**b)** 23

**c)** 61

**d)** 17

**e)** 49

**Resolução**

Sejam x e y esses números:

$x + y = 37$

$x.y = 330$



Da primeira equação, temos que $y = 37 - x$, que substituindo na segunda:

$x(37 - x) = 330$

$37x - x^2 - 330 = 0$

$x^2 - 37x + 330 = 0$

Note que $a = 1, b = -37, c = 330$

Calculando o valor de Δ:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-37)^2 - 4.1.(330) = 1369 - 1320 = 49$

Calculando as raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-37) \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{37 \pm 7}{2}$$

Daí,

$$x_1 = \frac{37 + 7}{2} = 22$$
$$x_2 = \frac{37 - 7}{2} = 15$$

Assim, se $x = 22$, então $y = 15$, e se $x = 15$, então $y = 22$.

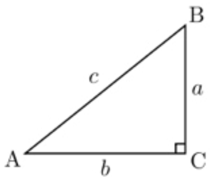
Logo, $22 - 15 = 7$.

## > Geometria plana

O triângulo é o polígono como menor número de lados na geometria plana, pois só tem três lados. E dentro dos conjuntos dos triângulos, podemos separá-los de acordo com os seus lados ou os ângulos internos. Vamos ver aqui um tipo de triângulo em especial: o triângulo retângulo e suas relações.

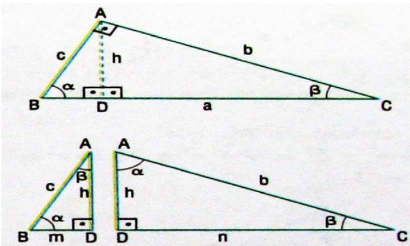
### • O triângulo retângulo e suas relações métricas

Denomina-se triângulo retângulo o triângulo que tem um de seus ângulos retos, ou seja, um de seus ângulos mede 90°. O triângulo retângulo é formado por uma hipotenusa e dois catetos, a hipotenusa é o lado maior, o lado aposto ao ângulo de 90°, e os outros dois lados são os catetos.




Na figura, podemos observar o triângulo retângulo de vértices A, B e C, e lados a, b e c. Como o ângulo de 90° está no vértice C, então a hipotenusa do triângulo é o lado c e os catetos são os lados a e b.

Assim podemos separar um triângulo em dois triângulos semelhantes:




Neste segundo triângulo, podemos observar uma perpendicular à hipotenusa até o vértice A, essa é a altura h do triângulo, separando assim a hipotenusa em dois segmentos, o segmento m e o segmento $n$. Divididos esses dois triângulos obtemos dois triângulo retângulos, o triângulo $\Delta ABD$ e $\Delta ADC$. como os ângulos dos três triângulos são congruentes, então podemos dizer que os triângulos são semelhantes.

Com essa semelhança, ganhamos algumas relações métricas entre os triângulos:

- $\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am$
- $\frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow cb = ah$
- $\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an$
- $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn$

Da primeira e terceira equação, obtemos:

$c^2+b^2=am+an=a(m+n)$

Como vimos na figura que $m+n=a$, então temos:

$c^2+b^2=aa=a^2$

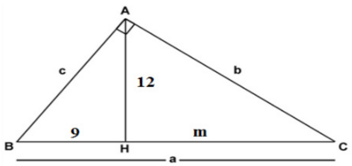
Ou seja, o teorema de Pitágoras.

**Exemplos:**

1. Em um triângulo retângulo em A, a altura relativa à hipotenusa mede 12, e o menor dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, 9. Calcule o menor lado do triângulo.



Considere a figura:




Pela quarta relação, temos:

$$h^2 = mn \Rightarrow 12^2 = 9m \Rightarrow 144 = 9m \Rightarrow m = \frac{144}{9} \Rightarrow m = 16$$

e assim,

$$a=m+n \Rightarrow a=16+9 \Rightarrow a=25$$

Agora pela primeira relação, temos:

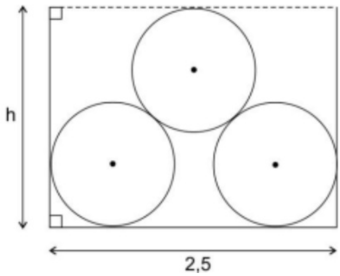
$$c^2=9a \Rightarrow c^2=9.25 \Rightarrow c^2=225 \Rightarrow c=5$$

E pela terceira relação, temos:

$$b^2=16.25 \Rightarrow b^2=400 \Rightarrow b=20$$

Logo, o menor lado do triângulo mede 15.

2. Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira de largura 2,5 metros, conforme a figura abaixo:




Cada tronco é um cilindro reto, cujo o raio da base mede 0,5 metros. Logo a altura $h'$ em metros é:

Se fizermos segmentos ligando os centros dos círculos, obtemos um triângulo isósceles, de lados 1, 1 e 1,5. Assim, traçando a altura h' do triângulo, ela separa a base em dois segmentos iguais de 0,75 cada. Dessa forma temos um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 1m, um cateto medindo $0{,}75m = \frac{3}{4}$ e o outro medindo h'. Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$1^2 = h'^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow h'^2 = 1 - \frac{9}{16} \Rightarrow h' = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Dessa forma: $\mathbf{h = h' + 0{,}5 + 0{,}5 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{7}+4}{4}}\,m.$

## > Polígonos

Dizemos que polígonos são figuras fechadas formadas por segmentos de retas. Todos os polígonos são formados por lados, vértices e, ângulos, cada segmento é chamado de lado do polígono, ponto de encontro entre dois lados é chamado de vértice e quando dois lados se encontram, formam o ângulo do polígono. Os segmentos que ligam dois vértices não consecutivos são chamados de diagonal do polígono.

Os polígonos podem ser classificados em alguns grupos:

- Convexos e não convexos.
- Um polígono é chamado de convexo se todas as suas diagonais estão totalmente dentro do polígono.
- Regulares e não regulares.
- Um polígono é chamado de regular quando todos os seus lados têm a mesma medida.
- Nomenclatura de cada polígono:



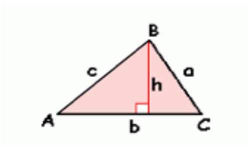
| N° de lados do polígono | Nome do polígono |
|---|---|
| 3 | Triângulo |
| 4 | Quadrilátero |
| 5 | Pentágono |
| 6 | Hexágono |
| 8 | Heptágono |
| 10 | Decágono |
| 12 | Dodecágono |

## > Cálculos de área

Vamos agora calcular a área de alguns polígonos, mas vamos considerar para isso apenas os polígonos convexos.

- Área de um triângulo

Seja o triângulo abaixo:



Então a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{bh}{2}$$

Onde b é a base do triângulo e h é a altura.

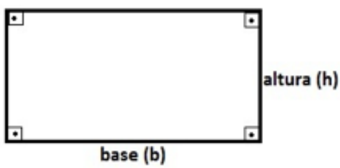
Agora, quando o triângulo for equilátero, ou seja, todos os lados tiverem a mesma medida, então a área do triângulo será:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Onde l é o lado do triângulo.

- Área de um quadrilátero
- Área de um retângulo

Vamos primeiro calcular a área de um retângulo, seja o retângulo da figura abaixo:




Então a área do retângulo é dada por:

$$A=b.h$$

No caso em que tivermos um quadrado, ou seja, todos os lados forem iguais, então a área será:

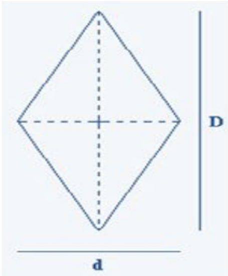
$$A=l2$$

Onde l é o lado do quadrado.

Agora vamos ver como se calcula a área de quadriláteros com seus ângulos internos diferentes de 90°:

- Área de um losango

Seja o losango da figura abaixo:

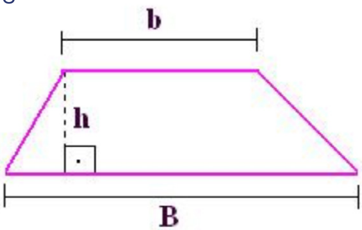



Então temos a área do losango $A = \frac{Dd}{2}$

D é a diagonal maior do losango, e d é a diagonal menor.

- Área de um trapézio

Seja o trapézio da figura abaixo:



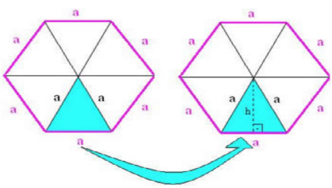

Então a área do trapézio é dada por:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Onde B é a base maior, b a base menor e h a altura do trapézio.

- Área de um hexágono

Neste caso, além dos hexágonos serem convexos, como já foi dito no início, os hexágonos serão também regulares. Então, seja o hexágono na figura abaixo:

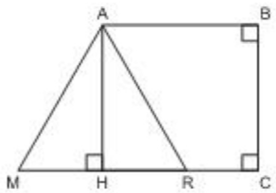


Como pode ser visto na figura acima, um hexágono regular pode ser dividido entre seis triângulos equiláteros. Então a área de um hexágono é 6 vezes a área de um triângulo equilátero com lados de mesma medida. Logo a área de um hexágono é:

$$A = 6\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \ ou\ A = 3\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

**Exercícios resolvidos**

Na figura abaixo, temos o triângulo equilátero MAR, de área S, e o retângulo $ABCH$, de área $\frac{11S}{6}$.



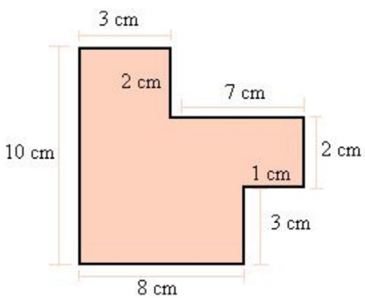

Qual a área do trapézio ABCR, em função de S?

Podemos usar a fórmula do trapézio para calcular a área de ABCR, mas podemos simplificar fazendo apenas a área do quadrado ABCH subtraído da metade da área do triângulo MAR. Dessa forma, temos que a área do trapézio ABCR é

$$\frac{11S}{6} - \frac{S}{2} = \frac{11S - 3S}{6} = \frac{8S}{6} = \frac{4S}{3}$$

Logo, a área do trapézio é $\frac{4S}{3}$.

1. Calcule a área da figura abaixo:



Uma tática bastante usada para esse tipo de figura é separá-la em figuras em que se sabe calcular a área. Dessa forma, podemos separar a figura em três retângulos, e a soma das áreas dos retângulos é a área da figura total. Assim temos que:

$$A=3.10+7.2+3.5=30+14+15=59$$

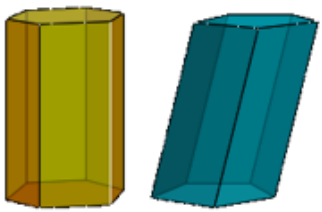
**> Área e volume de prismas e pirâmides**

- Prismas

Prismas são sólidos do espaço, que são formados por alguns elementos. São eles: as arestas, os vértices, a base e as faces laterais. A base e a sua face superior são formados por polígonos, e as faces laterais são formadas por retângulos, onde o número de faces laterais que um prisma possui é o mesmo número de lados do polígono de sua base.

Os prismas podem ser retos ou oblíquos. Na figura abaixo, o primeiro prisma é reto e o segundo é um prisma oblíquo.





As nomenclaturas de um prisma são dadas pelo nome do polígono da base constituído com a forma que o prisma é reto ou oblíquo. Por exemplo:

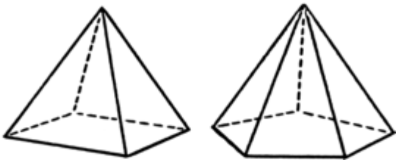
Prisma triangular reto, prisma retangular oblíquo, prisma hexagonal oblíquo etc. O cálculo da área de um prisma é dado pela soma das áreas de suas faces, inclusive a da base e da face superior. E o volume de um prisma é dado por:

$$V=\frac{A_b.h}{2}$$

$A_b$ é a área da base do prisma e h a altura do prisma.

- Pirâmides

As pirâmides, assim como os prismas, também são sólidos do espaço, mas com a única diferença que no caso das pirâmides não existe base superior, ou seja, todas as arestas laterais que começam nos vértices da base vão se encontrar todas em um único ponto, isto é, ao invés de uma base superior, temos apenas um ponto. Desta forma, como no caso dos prismas, em que todas as faces laterais eram retangulares, no caso das pirâmides, as faces laterais são todas triangulares.



As nomenclaturas das pirâmides são dadas da mesma forma que a nomenclatura dos prismas, por exemplo, nas duas figuras acima, temos uma pirâmide reta de base quadrada e uma pirâmide reta de base pentagonal.



A área total de uma pirâmide é dada da mesma forma que os primas, mas como no caso da pirâmide não temos base superior, então a área total será apenas a soma da área da base com a área de cada face lateral, ou seja:

$$A_{total}=A_{base}+A_{lateral}$$

Já o volume pode ser calculado como um terço da área do prisma de mesma base, ou seja:

$$V=\frac{1}{3}A_b.h$$

$A_b$ representa a área da base e h a altura da pirâmide.

## Exercícios resolvidos

- Prismas

**1)** Um tanque com a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões 300cm, 4m e 20dm está com $\frac{3}{4}$ do volume ocupado por água. Sabendo que um $1dm^3=1litro$, quantos litros de água faltam para encher completamente o tanque?

Vamos calcular o volume deste sólido, mas antes temos que deixar as medidas em mesma unidade. Como teremos que usar o volume em dm para passar para litros, então vamos transformar todas as unidades em dm. temos:, $300cm=30dm$, e $4m=40dm$. Assim:

$$V=A_b.h$$

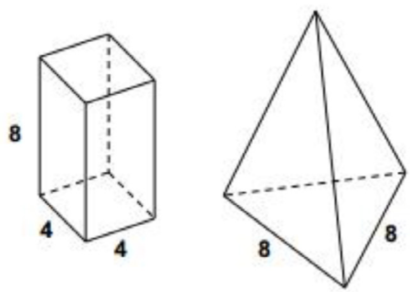
Como $A_b=30.40=1200dm^2$, então:

$$V=1200.20=24000dm^3$$

Assim o volume total será de 24000 litros, como $\frac{3}{4}$ do tanque está cheio, então faltam $\frac{1}{4}$ do tanque para completá-lo. Desta forma, $\frac{1}{4}.24000=6000\ litros$. Logo, faltam $6000\ litros$ para completar o tanque.



**2)** As figuras abaixo apresentam um bloco retangular de base quadrada, uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero, e algumas de suas medidas:



**a)** Calcule o volume do bloco retangular e a área de base da pirâmide.

**b)** Qual deve ser a altura da pirâmide para que seu volume seja igual ao bloco retangular?

**a)** $V=A_b.h$, então $A_b=4.4=16$. Dessa forma, temos que $V=16.8=128$. Agora como a base da pirâmide é um triângulo equilátero, então temos $A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Como no caso da pirâmide $l=8$, então $A_b = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

**b)** Agora temos o volume da pirâmide, dado por, $V= \frac{1}{3} A_b.h$, ou seja, $V= \frac{1}{3} 16\sqrt{3}\, h$. Como quero que os dois volumes tenham a mesma medida, então $\frac{1}{3}16\sqrt{3}h = 128 \Rightarrow h = \frac{3.128}{16\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{24\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 8\sqrt{3}$, logo a altura que a pirâmide deve ter para que tenha o volume de mesma medida do bloco retangular é de $8\sqrt{3}$.

## Sequências

- Progressão aritmética (PA)

Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão $(r)$.

Quando $r>0$, a progressão aritmética é crescente; quando $r<0$, decrescente, e quando $r=0$, constante ou estacionária.

- $(2, 5, 8, 11, ...)$, temos $r=3$. Logo, a $PA$ é crescente.
- $(20, 18, 16, 14, ...)$, temos $r=-2$. Logo, a $PA$ é decrescente.
- $(5, 5, 5, 5, ...)$, temos $r=0$. Logo, a $PA$ é constante.

A representação matemática de uma progressão aritmética é:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \text{ na qual } \begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \vdots \end{cases}$$

Logo: $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_{n+1} - a_n$$

Para encontrar um termo específico, a quantidade de termos ou até mesmo a razão de uma PA, dispomos de uma relação chamada termo geral de uma PA: a_n=a_1+(n-1)r, onde:

$a_n$ é o termo geral

$a_1$ é o primeiro termo

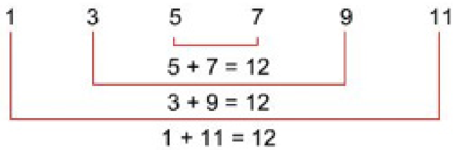
$n$ é o número de termos

$r$ é a razão da PA

Propriedades:

$P_{1.}$ Em toda PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.






$P_{2.}$ Uma sequência de três termos é PA se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois, isto é:

$(a,b,c)$ é $PA \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$

Exemplo: seja a $PA\ (2, 4, 6)$, então, $4 = \frac{2+6}{2}$.

$P_{3.}$ Em uma PA com número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética entre os extremos.

$(3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39), 21 = \frac{3+39}{2}$

$P_{4.}$ A soma $S_n$ dos $n$ primeiros termos da $PA\ (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\ )$ é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

**Exercício resolvido**

Numa cerimônia militar, os soldados de um quartel da capital capixaba foram organizados em fileiras. Na primeira fileira havia 18 soldados, na segunda 20 soldados, na terceira 22 soldados e assim sucessivamente. Sabe-se que no total havia 480 soldados nessa cerimônia. Qual o número de fileiras de soldados que foram formadas nessa cerimônia?

**a)** 15

**b)** 16

**c)** 17

**d)** 18

**e)** 19

**Resolução:**

Nota-se que temos uma Progressão Aritmética, onde o primeiro termo é o 18, a razão é o 2 e a soma dos termos é 480.

Pela fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_n = 18 + (n-1)2$$
$$a_n = 18 + 2n - 2$$
$$a_n = 16 + 2n$$

Vamos agora substituir na fórmula da soma dos termos de uma P.A.:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$480 = \frac{(18 + 16 + 2n)n}{2}$$

$$480.2 = (34 + 2n)n$$

$$960 = 34n + 2n^2$$

$$2n^2 + 34n - 960 = 0$$

$$n^2 + 17n - 480 = 0$$

Temos uma equação do segundo grau. Resolvendo pelo método de soma e produto: $= -\frac{b}{a} = \text{-}17$; produto $= \frac{c}{a} = -480$
Os dois números cuja soma é -17 e o produto é -480 são -32 e 15. Como o n representa a quantidade de termos, os valores negativos não servem, logo, n = 15.

**Resposta: A**

### Exercício resolvido

As distâncias entre 3 cidades, medidas em quilômetros, são os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Considerando que essas medidas estão em progressão aritmética, com razão 45, julgue os itens a e b.

**a)** A menor distância entre as 3 cidades é inferior a 130 km.

**b)** A soma das distâncias entre as 3 cidades é igual a 540 km.

### Resolução

Se estão em P.A. de razão 45, temos:

$$hipotenusa = x + 45$$

$$cateto\ 1 = x$$

$$cateto\ 2 = x - 45$$

Usando o Teorema de Pitágoras:

$$(x + 45)^2 = x^2 + (x - 45)^2$$

$$x^2 + 90x + 45^2 = x^2 + x^2 - 90x + 45^2 \text{ (“cortando” } x^2 \text{ e } 45^2 \text{ que se repetem)}$$

$$0 = x^2 - 90x - 90x$$

$$x^2 - 180x = 0$$

$$x(x - 180) = 0$$

$$\text{Daí, } x = 0 \text{ ou } x = 180$$

Vamos descartar $x = 0$, pois trata-se de um dos lados do triângulo.

Cada lado medirá: $135, 180$ e $225$

**a)** A menor distância entre as 3 cidades é inferior a 130 km. A menor distância é 135 km.

ERRADO

**b)** A soma das distâncias entre as 3 cidades é igual a $540\ km.\ 225 + 180 + 135 = 540\ km.$

**CERTO**

- Progressão geométrica (PG)

Progressão geométrica é uma sequência de números não-nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo, chamado razão da progressão $(q)$.

A representação matemática de uma progressão geométrica é $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, na qual $a_2 = a_1.q, a_3 = a_2.q, \ldots$ etc. De modo geral, escrevemos: $a_{n+1} = a_n . q, \forall\, n \in\ \mathbb{N}^*\ e\ q \in \mathbb{R}$.
Numa PG, a razão q é igual ao quociente entre qualquer termo, a partir do segundo, e o anterior. Exemplo:

$$(4, 8, 16, 32, 64)$$

$$q = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = 2$$

$$(6, -18, 54, -162)$$

$$q = \frac{-18}{6} = \frac{54}{-18} = \frac{-162}{54} = -3$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, sendo\ q\ a\ razão\ da\ PG.$$

Podemos classificar uma PG como:

- Crescente

Quando $a_1 > 0\ e\ q > 1$

$$(2, 6, 18, 54, \ldots)\ \text{é}\ uma\ PG\ crescente\ com\ a_1 = 2\ e\ q = 3$$

Quando $a_1 < 0\ e\ 0 < q < 1$

$$(-40, -20, -10, \ldots)\ \text{é}\ uma\ PG\ crescente\ com\ a_1 = -40\ e\ q = \frac{1}{2}$$

- Decrescente

Quando $a_1 > 0\ e\ 0 < q < 1$

$$(256, 64, 16, \ldots)\ \text{é}\ uma\ PG\ decrescente, com\ a_1 = 256\ e\ q = \frac{1}{4}$$

Quando $a_1 < 0\ e\ q > 1$

$$(-2, -10, -50, \ldots)\ \text{é}\ uma\ PG\ decrescente, com\ a_1 = -2\ e\ q = 5$$

- Crescente

  Quando $q = 1$

$$(3,3,3,3,3,\ldots)\ \acute{e}\ uma\ PG\ constante, com\ a_1 = 3\ e\ q = 1$$

- Alternada

  Quando $q < 0$

$$(2,-6,18,-54)\ \acute{e}\ uma\ PG\ alternada, com\ a_1 = 2\ e\ q = -3$$

A fórmula do termo geral de uma PG nos permite encontrar qualquer termo da progressão.

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

**Propriedades:**

$P_{1.}$ Em toda PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.



1 3 9 27 81 243

9 . 27 = 243

3 . 81 = 243

1 . 243 = 243

$P_{2.}$ Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma PG se, e somente se, o quadrado do termo médio for igual ao produto dos outros dois, isto é, sendo $a \neq 0$.

$$(a,b,c)\ \acute{e}\ PG \ \Leftrightarrow b^2 = ac$$

$$(2,4,8) \ \Leftrightarrow 4^2 = 2.8 = 16$$

$P_{3.}$ Em uma PG com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

$(2,4,8,16,32,64,128,256,512)$,temos que $32^2=2.512=1024$

$P_{4.}$ Soma dos n primeiros termos de uma PG $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$P_{5.}$ Produto dos n primeiros termos de uma PG $P_n = (a_1)^n . q^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$P_{6.}$ Soma dos infinitos termos de uma PG

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}, se -1 < q < 1$$
$$S_\infty = +\infty, se\ q > 1\ e\ a_1 > 0$$
$$S_\infty = -\infty, se\ q > 1\ e\ a_1 < 0$$

**Exercício resolvido**

Um soldado, um sargento e um tenente têm suas idades, em anos, dispostas em progressão geométrica, sendo o soldado o mais novo dos três, e o tenente, o mais velho. Sabendo que o produto dessas idades, em anos, é 27.000 e que a soma das idades do sargento e do tenente é 75 anos, julgue a afirmação abaixo:
"A idade do sargento é superior a 32 anos"

**Resolução**

Sabendo que as idades do soldado, do sargento e do tenente estão em progressão geométrica, nesta ordem, as idades dos mesmos serão:

$$Soldado = \frac{x}{y}$$
$$Sargento = x$$
$$Tenente = xy$$

$Y$ é a razão da P.G.

Como o produto das idades é 27000:

$$\frac{x}{y}.x.xy = 27000$$
$$x^3 = 27000$$
$$x = 30$$

Sabendo que a idade do sargento é 30, e que a soma das idades do sargento mais tenente é 75, temos que a idade do tenente é 45. Assim,

$$xy = 45$$
$$30y = 45$$
$$y = \frac{45}{30}$$
$$y = 1{,}5$$

A idade do soldado é:

$$\frac{30}{1{,}5} = 20$$

Assim:
Soldado: 20 anos
Sargento: 30 anos
Tenente: 45 anos
A idade do sargento é superior a 32 anos.

**Resposta: ERRADO**

**Exercício resolvido:**

A largura, a altura e o comprimento de um paralelepípedo reto retângulo formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 3. Sabe-se que o volume desse paralelepípedo é igual a 5,832 litros. A altura desse paralelepípedo mede:

**a)** 1 m

**b)** 0,5 m

**c)** 0,23 m

**d)** 0,18 m

**Resolução:**

Se em 1 metro cúbico temos 1000 litros, para termos 5,832 litros, precisamos ter 0,005832 metros cúbicos.
Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula: V = largura x altura x comprimento.



Como os lados formam uma PG de razão 3, temos:

$$Largura = \frac{x}{3}$$
$$Altura = x$$
$$Comprimento = 3x$$

Assim:

$$\frac{x}{3}.x.3x = 0{,}005832$$
$$x^3 = 0{,}005832$$
$$x = 0{,}18\ m$$

**Resposta: D**

### Exercício resolvido

Julgue a afirmação abaixo, relativa a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.
"A soma $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32$ é inferior a $2$"

### Resolução

Claramente temos a soma dos 6 termos de uma PG, onde o primeiro termo é 1 e a razão é 1/2.
Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_6 = \frac{1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_6 = \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{1}{2}}$$

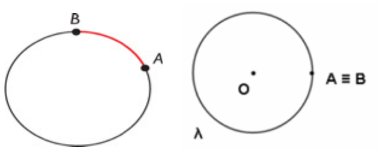
$$S_6 = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} \cong 1{,}96$$

**Resposta: Certo.**

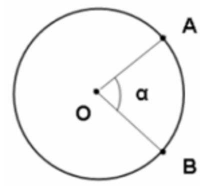
### Trigonometria

- Arcos, ângulos e valor das funções trigonométricas de arcos notáveis.

O arco é uma parte de uma circunferência delimitada por dois pontos, se os dois pontos estiverem na mesma posição, dizemos que os pontos formam um arco de comprimento 0 ou um arco nulo.



Os arcos são medidos em radianos, então dizemos que o arco AB mede r radianos, ou na segunda figura, dizemos que o arco mede O radianos. Se ligar cada ponto da circunferência que forma um arco com o centro da circunferência, no encontro desses segmentos, temos o que chamamos de ângulo. Se tivermos um arco nulo, então teremos também um ângulo nulo.




Podemos ver na figura acima que AB formam um arco e $\alpha$ é um ângulo. O ângulo, diferentemente dos arcos, não são medidos em radianos, mas em graus, ou seja podemos dizer que AB forma um ângulo de $\alpha°$, ou seja, alfa graus.

Podemos observar, então, que dois pontos em uma circunferência podem ser formar um arco e um ângulo. Logo pode-se chegar a conclusão de que existe uma relação entre a medida do arco com a medida do ângulo, ou seja, uma relação entre o radiano e os graus. E existe, observe a tabela abaixo:

| GRAUS | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RADIANO | $0\,rad$ | $\frac{\pi}{6}\,rad$ | $\frac{\pi}{4}\,rad$ | $\frac{\pi}{3}\,rad$ | $\frac{\pi}{2}\,rad$ | $\frac{2\pi}{3}\,rad$ | $\frac{3\pi}{4}\,rad$ | $\frac{5\pi}{6}\,rad$ | $\pi\,rad$ | $\frac{7\pi}{6}\,rad$ | $\frac{5\pi}{4}\,rad$ | $\frac{4\pi}{3}\,rad$ | $\frac{3\pi}{2}\,rad$ | $\frac{5\pi}{3}\,rad$ | $\frac{7\pi}{4}\,rad$ | $\frac{11\pi}{6}\,rad$ | $2\pi$ |

No caso em que for 360°, uma volta completa, os pontos estão juntos, na mesma posição. Logo, ângulo e arco terão valores nulos.

Sabendo desta tabela, podemos mudar a unidade fazendo regra de três.

**Exemplo:**

**a)** 120°
**b)** $\frac{3\pi}{4}$ rad

**a)** $120° \rightarrow x$

$180° \rightarrow \pi$, multiplicando cruzado temos,

$$120\pi = 180x \Longrightarrow x = \frac{120\pi}{180} \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

**a)** $x \rightarrow \frac{3\pi}{4}$

$180° \rightarrow \pi$, multiplicando cruzado temos,

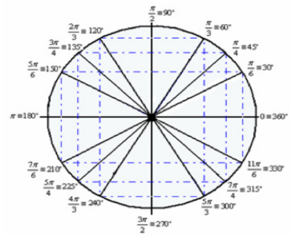
$$x\pi = 180\frac{3\pi}{4} \Longrightarrow x\pi = 135\pi \Longrightarrow x = 135°.$$

Existe também, quando falamos em arcos, os chamados arcos notáveis. São arcos cuja as funções seno e cosseno, serão mais fáceis de lembrar. Observe a tabela abaixo com os arcos e ângulos notáveis e os respectivos valores das funções seno e cosseno.

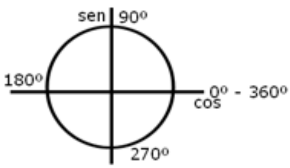
| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $senx$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $cosx$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $tgx$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\nexists$ | 0 | $\nexists$ | 0 |

- Funções trigonométricas

Vamos agora começar a falar dos arcos e ângulos no círculo trigonométrico, onde podem ser observados os valores na tabela de ângulos notáveis. Observe a figura abaixo, que mostra todos os ângulos notáveis no circulo trigonométrico.



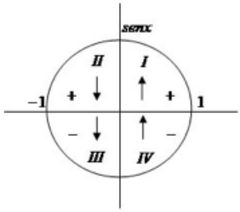
Então observe que o círculo começa no ângulo de 0° e continua até o ângulo de 360°, e diremos que, no sentido anti-horário, será positivo e, no sentido horário, será negativo. Mas os eixos principais, que seriam os eixos x e y, são chamados de eixo dos senos e eixo dos cossenos. Como se pode observar na tabela o ângulo de 0º, a função seno vale 0 e a função cosseno vale 1. Dessa forma, chega-se à conclusão que o eixo que seria o eixo x será o eixo dos cossenos e o eixo que seria o eixo x será o eixo dos senos, e com o círculo de raio 1.



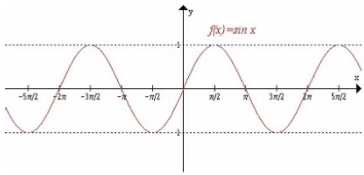

Vamos agora trabalhar cada função separadamente.

- Função seno

Já vimos os valores de seno para os ângulos notáveis, mas observe que podemos fazer arcos no círculo trigonométricos maiores de 360°, ou seja, darmos mais de uma volta completa, e podemos fazer isto tanto no sentido horário como no sentido anti-horário, isto é, podemos ter infinitos valores para o ângulo x. Então podemos calcular o valor da função seno para qualquer valor de x que quisermos, isto nos dá a conclusão que o domínio da função seno é todos os reais. Agora, como o círculo trigonométrico tem raio 1, então para qualquer valor de x, seno assumira seu maior valor em 1 e assumira seu menor valor em -1, ou seja, a imagem da função seno é o conjunto [-1,1]. Assim temos a função, $f(x)=sinx$, onde $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1,1]$. Podemos agora separar o círculo trigonométrico em quatro partes, os quatro quadrantes do sistema cartesiano. Como a função seno é representada pelo eixo y, então teremos a função seno positiva nos quadrantes 1 e 2, e negativa nos quadrantes 3 e 4.



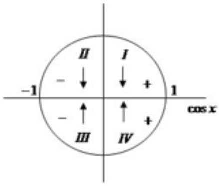

E por fim, seguindo as características da função seno observadas até agora, temos que o gráfico da função seno será:



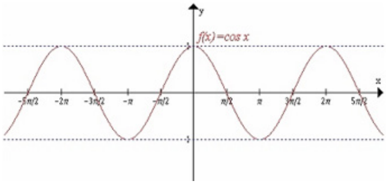

- Função cosseno

As primeiras observações que fiz para a função seno também são validas para a função cosseno, pois assim como a primeira, podemos calcular a função cosseno para qualquer valor x real. Da mesma forma também, o círculo trigonométrico tem raio 1, então para qualquer valor x, cosseno sempre vai assumir seu maior valor em 1, e seu menor valor em -1. Dessa forma, temos $f(x)=cos\,x$, onde $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1,1]$.

Agora diferenciando da função seno, a função cosseno será positiva nos quadrantes 1 e 3 e negativa nos quadrantes 2 e 4, pois diferentemente da função seno, a função cosseno é representada pelo eixo $x$.

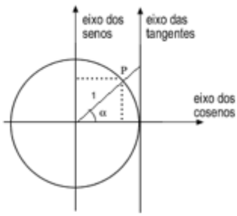



E por fim, também observando as características da função cosseno, podemos observar que o gráfico da função cosseno será:

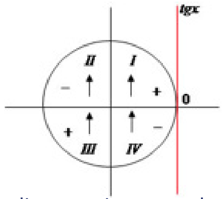



- Função tangente

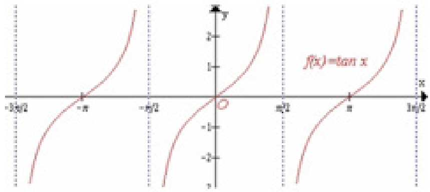
Temos por fim a função tangente, definida em um eixo paralelo ao eixo dos senos passando pelo eixo dos cossenos no ponto 1.




Observe, que quando $x = 90°$, a reta que define a função tangente estará no eixo dos senos, ou seja não tocará o eixo das tangentes, fazendo com que a função não exista neste ponto, e não só nos de 90°, mas no de 270° e todas às vezes que a reta cair nestes pontos. Por outro lado, a função tangente assumirá qualquer valor nos reais, fazendo com que sua imagem seja todos os reais. Dessa forma, temos $f(x)=\tan x$, onde $Dom(f)= \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}(2k+1)$,onde $k\in\mathbb{Z}\}$ e $Im=\mathbb{R}$.
Também podemos observar que a função tangente é positiva nos quadrantes 1 e 3 e negativa nos quadrantes 2 e 4.




E com as características ditas acima, podemos ver que o gráfico da função tangente será:




- Soma de arcos, arco duplo e bissecção de arcos.



Existem muitas coisas que podem ser trabalhadas dentro da função seno, cosseno e tangente. Temos também algumas propriedades dessas funções. Vamos trabalhar algumas delas agora.

- Soma de arcos

Na soma de arcos, podemos cometer um erro muito comum, que é usar essa propriedade, $sin(a+b)=sin(a)+sin(b)$,$cos(a+b)=cos(a)+cos(b)$ e $tan(a+b)=tan(a)+tan(b)$, mas isso não é verdade. Observe que sin90=1, mas se usarmos a propriedade acima temos, $\sin 90 = \sin(30+60) = sin30 + sin60 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, logo $sin(30+60) \neq sin(30)+sin(60)$, provando assim que a propriedade acima é falsa. Agora, não é porque a afirmação é falsa que não exista nenhuma propriedade envolvendo a soma:

**1.** $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$

**2.** $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

**3.** $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a).\tan(b)}$

- Arco duplo

Da propriedade da soma, podemos tirar a seguinte propriedade,

1. $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\sin(a)\cos(a)$
2. $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = cos^2(a) - sin^2(a)$
3. $\tan(2a) = \tan(a+a) = \frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a).\tan(a)} = \frac{2\tan(a)}{1-tan^2(a)}$

- Bissecção de arcos ou arco metade

Também temos a fórmula do arco metade para senos, cossenos e tangentes:

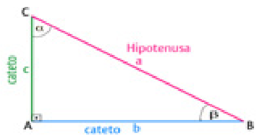
1. $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$
2. $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$
3. $\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$



## Resolução de triângulos

- Triângulo retângulo

Também podemos definir relações entre senos e cossenos usando o triângulo retângulo, observe:




Um triângulo retângulo é composto por uma hipotenusa e dois catetos. O lado maior, ou seja, o lado oposto ao de ângulo de 90° é chamado de hipotenusa, e os lados menores são chamados catetos. Temos algumas relações de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

- Seno

$\sin(x) = \frac{cateto\ oposto\ à\ x}{hipotenusa}$, logo temos que:

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \dfrac{cateto\ oposto\ à\ \alpha}{hipotenusa} = \dfrac{b}{a} \\ \sin(\beta) = \dfrac{cateto\ oposto\ à\ \beta}{hipotenusa} = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

- Cosseno

$\cos(x) = \frac{cateto\ adjacente\ \grave{a}\ x}{hipotenusa}$, logo temos que:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{cateto\ adjacente\ \grave{a}\ \alpha}{hipotenusa} = \dfrac{c}{a} \\ \cos(\beta) = \dfrac{cateto\ adjacente\ \grave{a}\ \beta}{hipotenusa} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

- Tangente

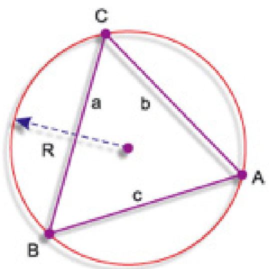
$\tan(x) = \frac{cateto\ oposta\ \grave{a}\ x}{cateto\ adjacente\ \grave{a}\ x}$, logo temos que:

$$\begin{cases} \tan(\alpha) = \dfrac{cateto\ oposto\ \grave{a}\ \alpha}{cateto\ oposto\ \grave{a}\ \alpha} \\ \tan(\beta) = \dfrac{cateto\ oposto\ \grave{a}\ \beta}{cateto\ adjacente\ \grave{a}} \end{cases}$$

## Relação trigonométrica para qualquer triângulo

- Lei dos senos

Seja um triângulo qualquer inscrito na circunferência, como na figura abaixo:




Então temos:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$

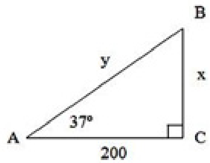
- Lei dos cossenos

Da mesma forma que a lei dos senos e usando a figura acima temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(C)$$

### Exercícios resolvidos

**1)** Considerando o triângulo retângulo




Escreva uma equação trigonométrica que represente o valor de x e o valor de y.

**Res.:** Para x, temos que x é o cateto oposto ao ângulo dado, e é dado também o cateto adjacente. Logo, uma relação trigonométrica para um ângulo e os dois catetos. A equação para x será:

$$\tan(37°) = \frac{x}{200} \Longrightarrow x = 200.\tan(37°)$$

Agora como y é a hipotenusa do triângulo, e ainda é dado um ângulo e o cateto adjacente, então podemos usar a equação cosseno para determinar y. Assim temos:

$$\cos(37°) = \frac{200}{y} \Longrightarrow y = \frac{200}{\cos(37°)}.$$

**2)** Calcule quanto vale cos(120°).

Podemos, neste caso, usar uma das propriedades de soma, pois temos que

$$\cos(120°) = \cos(180° - 60°) = \cos(180°)\cos(60°) + \sin(180°)\sin(60°) = (-1).\frac{1}{2} + 0.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Logo temos que $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$

**3)** Na parte posterior de uma estante de 1,30m de altura, com a base apoiada no chão, foi colocada uma trava diagonal, formando um ângulo de 30° com a diagonal, constituindo assim um triângulo. Qual é o comprimento dessa trava?

Podemos ver que temos um triângulo retângulo, onde nos é dado um ângulo de 30°, o cateto oposto, que vale 1,3, nos é pedido a hipotenusa. Logo podemos usar o seno neste caso, assim temos:

$$\sin(30°) = \frac{1{,}3}{x} \Longrightarrow x = \frac{1{,}3}{\sin(30°)} \Longrightarrow x = \frac{1{,}3}{0{,}5} \Longrightarrow x = 2{,}6$$

Assim, o comprimento da trava será de 2,6 metros.

## Matriz

Matrizes são tabelas retangulares utilizadas para organizar dados numéricos. Nas matrizes, cada número é chamado elemento da matriz, as filas horizontais são chamadas linhas e as filas verticais são chamadas colunas. Sua representação genérica é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Em uma matriz, $a_{32}$, representa o elemento da 3ª linha e da 2ª coluna, enquanto $a_{23}$ representa o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna da matriz $A_{mxn}$.



Abreviadamente, a matriz A pode ser representada assim: $A=(aij\ )$ $mxn$. Nessa expressão, $i$ assume valores no conjunto $\{1, 2, 3, ..., m\}$ e $j$ assume valores no conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

- Matriz quadrada

Uma matriz de ordem $mxn$ é dita quadrada quando o número de linhas dessa matriz é igual ao número de colunas. Como $m = n$, dizemos que a matriz é do tipo $nxn$ ou que é quadrada de ordem $n$.

**Exemplos:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \textit{matriz quadrada de ordem } 2.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & -4 & 9 \end{pmatrix}; \textit{matriz quadrada de ordem } 3.$$

Numa matriz quadrada, os elementos $a_{ij}$, para os quais i=j, formam uma diagonal denominada diagonal principal. A outra diagonal é chamada de diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal $i = j$

diagonal secundária $i + j = n + 1$

- Matriz diagonal e matriz identidade

Toda matriz quadrada de ordem n, na qual $a_{ij}=0$ para $i \neq j$, é denominada matriz diagonal.

**Exemplos:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade ou matriz unidade é toda matriz quadrada de ordem n, na qual $a_{ij}=0$ para $i \neq j$, e $a_{ij}=1$ para $i=j$. Indica-se a matriz identidade de ordem n por $I_n$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Igualdade de matrizes

Considere as matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$. Dizemos que as matrizes A e B são iguais se forem de mesma ordem, e se cada elemento de A for igual ao elemento de B de respectiva ordem.

- Matriz transposta e matriz simétrica

Dada uma matriz A do tipo $mxn$, denominamos transposta de A (indicamos por $A^t$) a matriz do tipo $nxm$ obtida trocando-se ordenadamente as linhas de A pelas colunas de A.

Dada uma matriz A do tipo $mxn$, denominamos transposta de A (indicamos por $A^t$) a matriz do tipo nxm obtida trocando-se ordenadamente as linhas de A pelas colunas de A.

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}_{2x3} \text{ } e \text{ } sua \text{ } transposta \text{ } é \text{ } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}_{3x2}.$$

Uma matriz quadrada A de ordem n denomina-se matriz simétrica, quando $A=A^t$. Assim, são matrizes simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, porque \ A = A^t; B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, porque \ B = B^t.$$

- Adição e subtração de matrizes

A adição ou a subtração de duas matrizes de mesma ordem $A$ e $B$ é efetuada adicionando-se ou subtraindo-se, respectivamente, os seus elementos correspondentes.



**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \ e \ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & 3 + 2 \\ 1 + 4 & -5 + 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

- Matriz oposta

Denomina-se matriz oposta de uma matriz A a matriz -A, cujos elementos são os simétricos dos elementos correspondentes de A.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

- Matriz antissimétrica

Uma matriz quadrada A é dita antissimétrica se, e somente se, $A=-A^t$.

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ } é \text{ } antissimétrica, pois, A = -A^t.$$

- Observe que dois elementos colocados simetricamente em relação à diagonal principal são opostos. Além disso, os elementos dessa diagonal são todos nulos.

Propriedades da adição de matrizes:

$P_1$. Comutativa: $A+B=B+A$

$P_2$. Associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$

$P_3$. Elemento neutro: $A+0=A$

$P_4$. Elemento oposto: $A+(-A)=0$

**Obs:** neste caso, O representa a matriz nula.

- Multiplicação de um número real por matriz

Para multiplicar um número real por uma matriz, multiplicamos o número por todos os elementos da matriz, e o resultado é uma matriz do mesmo tipo. 

Dada uma matriz $A=(a_{ij})$ e um número real K, chama-se produto de k por A a matriz $B=(b_{ij})$, onde $b_{ij}=k.a_{ij}$.

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } k = 3, \text{então a matriz } B \text{ será:}$$

$$B = k.A = 3.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 15 \\ 6 & 21 \end{pmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não pode ser determinado através do produto dos seus respectivos elementos. Especificamente nessa operação, não podemos proceder do mesmo modo como fizemos até agora, já que a multiplicação de matrizes não é análoga à multiplicação de números reais.

Assim, o produto das matrizes $A=(a_{ij})_{mxp}$ e $B=(b_{ij})_{pxn}$ é a matriz $C=(c_{ij})_{mxn}$, onde cada elemento $c_{ij}$ é obtido através da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B.

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{2x3} \; e \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{3x2} \text{, assim, a matriz C será:}$$

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{2x3} . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2.0 + 1.3 + 3.4 & 2.2 + 1.5 + 3.3 \\ 3.0 + 4.3 + 5.4 & 3.2 + 4.5 + 5.3 \end{pmatrix}_{2z2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 32 & 41 \end{pmatrix}_{2x2}$$

A matriz produto A.B existe apenas se o número de colunas da 1ª matriz (A) é igual ao número de linhas da 2ª matriz (B). Assim,

$$A_{mxp} \; e \; B_{pxn} \Rightarrow (A.B)_{mxn}$$

Note que a matriz produto terá o número de linhas (m) do 1º fator e o número de colunas (n) do 2º fator.



Propriedades da multiplicação de matrizes.

Dadas as matrizes A,B e C de modo que as somas e os produtos estejam definidos, valem as propriedades:

$P_1$. Associativa

$$A.(B.C) = (A.\ B).C$$

$P_2$. Distributiva

À esquerda: $(B+C).A=B.A+C.A$

À direita: $A.(B+C)=A.B+A.C$

$P_3$. De forma geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, existem matrizes $A$ e $B$ tais que $AB \neq BA$.

$P_4$. Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento do produto, isto é, podemos ter $AB=0$, mesmo com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

$P_5$. Não vale também a lei do cancelamento, isto é, mesmo com $A \neq 0$ podemos ter $AB=AC$ e $B \neq C$.

- Matriz inversa

Qual o inverso do número 3? É o número $\frac{1}{3}$.

E o inverso do número $\frac{5}{4}$? É o número $\frac{4}{5}$.

De modo geral, o inverso de um número real $a, a \neq 0$ é o número $\frac{1}{a}$, que também é indicado por $a^{-1}$. Assim, temos:

$$a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$$

Usando um raciocínio análogo para verificar essa propriedade no caso de matrizes quadradas de mesma ordem.

Se existe uma matriz B, quadrada de ordem n, tal que $A.B=B.A=I_n$, dizemos que a matriz B é a matriz inversa de A. Costumamos indicar a matriz inversa por $A^{-1}$. Assim, $B=A^{-1}$. Portanto,

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$$

A matriz I é a matriz identidade da mesma ordem que as matrizes $A$ e $A^{-1}$.

Se a matriz quadrada A é invertível, então a sua inversa é única.

Quando uma matriz quadrada não possui inversa, dizemos que ela é singular ou não invertível.

**Exercício resolvido**

Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{2x3}$ em que $a_{ij}=i-j$ e $B=(b_{ij})_{3x2}$ em que $b_{ij}=i^2-j$. Seja a matriz C a matriz resultante do produto das matrizes A e B, nesta ordem. Assim, o elemento $c_{11}$ será:

**a)** 17

**b)** 18

**c)** 19

**d)** -18

**e)** -19

**Resolução**
O primeiro passo para resolver a questão é descobrirmos como são as matrizes A e B.

Como em um elemento $a_{ij}$, i representa a linha e j a coluna, podemos concluir que cada elemento de A é a diferença entre a linha e a coluna onde o mesmo está localizado. Assim:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$
$a_{12} = 1 - 2 = -1$
$a_{13} = 1 - 3 = -2$
$a_{21} = 2 - 1 = 1$
$a_{22} = 2 - 2 = 0$
$a_{23} = 2 - 3 = -1$

Veja como fica a matriz A: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Da mesma forma, vamos calcular cada elemento da matriz B, onde $b_{ij}=i^2-j$:

$b_{11} = 1^2 - 1 = 0$
$b_{12} = 1^2 - 2 = -1$
$b_{21} = 2^2 - 1 = 3$
$b_{22} = 2^2 - 2 = 2$
$b_{31} = 3^2 - 1 = 8$
$b_{32} = 3^2 - 2 = 7$

Veja como fica a matriz B: $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

Calculando o elemento $c_{11}$, onde $A.B = C$:

$c_{11} = 0.0 + (-1).3 + (-2).8$
$c_{11} = 0 - 3 - 16$
$c_{11} = -19$

**Resposta: E**

## Determinantes

Determinante de uma matriz quadrada de ordem n é um número real a ela associado. Cada matriz tem um único determinante.

- Determinante de uma matriz de 1ª ordem

Em particular, definimos o determinante de uma matriz $A=(a_{11})$, de 1ª ordem, o valor do seu único elemento $a_{11}$, ou seja:

$$detA = |a_{11}| = a_{11}$$

Observe:

- *Se M=(4), então detM=4.*
- *Se detA=-√2 e A é uma matriz de ordem 1, então A=(-√2).*

Determinante de uma matriz de 2ª ordem

A matriz quadrada de 2ª ordem $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tem como determinante o número real obtido pela expressao $a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$. Ou ainda:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

- Determinante de uma matriz de 3ª ordem

Podemos obter o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem utilizando uma regra prática denominada regra de Sarrus.

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Para o cálculo de seu determinante, procedemos da seguinte maneira:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{13}.a_{22}.a_{31})$$

Propriedades

$P_1$. Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada forem nulos, o seu determinante é zero.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, então\ detA = 0.$$

$P_2$. Se 2 linhas (ou 2 colunas) de uma matriz quadrada forem iguais ou proporcionais, seu determinante é nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \textit{então } detA = 0$$

$P_3$. Se uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada for combinação linear de outras linhas (ou colunas), seu determinante é nulo.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ *,em que a $3^a$ linha é a soma da $1^a$ com a $2^a$ linha,então,detA=0.*

$P_4$. O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta $A^t$, ou seja, $DA=D(A^t)$.

$$\textit{Dada a matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \textit{temos } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \textit{e seus determinantes}:$$
$$detA = -10 = detA^t$$



$P_5$. Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz é o oposto do determinante da primeira matriz.

$$\textit{Tome } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \textit{ com } detA = 6. \textit{Trocando as duas linhas de posição, temos}:$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \textit{onde o novo determinante é} -6.$$

$P_6$. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) por um número real k, então o determinante da nova matriz é o produto de k pelo determinante da primeira matriz.

$$\textit{Seja a matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \textit{seu determinante é}: \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2$$
$$\textit{multiplicando todos os elementos da 1ª linha de } A \textit{ por 3 temos a matriz}$$
$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \textit{cujo seu determinante é}: \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6$$
$$\textit{Note que } A' = 3A.$$

Observação: se multiplicarmos mais de uma linha (ou coluna), então devemos fazer $k^n.detA$, onde $n$ é o número de linhas ou colunas multiplicadas por $k$.

$$\textit{Seja } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 15 & 21 & 3 \end{pmatrix}, \textit{note que } A \textit{ é uma matriz triangular superior},$$
$$\textit{assim}, detA = 2.4.3 = 24.$$

## Teorema de Jacobi

Se adicionarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada A uma outra linha (ou coluna) multiplicada por um número qualquer, o determinante da matriz B obtida será igual ao da matriz A.

## Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então:

$$det(A.B)=detA.detB$$

Determinante da matriz inversa

$$detA^{-1}=1/detA$$

Se $detA=0$, não existe a matriz inversa.

## Exercício resolvido

Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e que o determinante de A é -2, calcule o valor do determinante da matriz 3A.
**a)** – 8
**b)** – 54
**c)** 27
**d)** 18
**e)** – 2

## Resolução

Para resolvermos a questão, vamos utilizar uma das propriedades das determinantes:

$$det(kA)=k^n\ detA$$

Onde $n$ é a ordem da matriz quadrada.

Desta propriedade temos que:

$$det(3A)=3^3.(-2)=-54$$

**Resposta: B**

**Exercício resolvido**

Dada a matriz A abaixo, o determinante da matriz 2A é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**a)** 40
**b)** 10
**c)** 18
**d)** 16
**e)** 36

**Exercício resolvido**

Temos duas formas de resolver a questão. Podemos calcular o determinante da matriz A e depois utilizar a propriedade P3 que se encontra em nosso material didático, ou calcular diretamente o determinante da matriz 2A. Vamos resolvê-la pelo primeiro método, utilizando a regra de Sarrus:



$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$detA = 2.1.4 + 1.1.0 + 3.1.1 - 0.1.3 - 1.1.2 - 4.1.1$$

$$detA = 8 + 0 + 3 - 0 - 2 - 4$$

$$detA = 5$$

Daí, pela propriedade $P_6$

$$det(2A) = 2^3\, detA$$

$$det(2A) = 8.5 = 40$$

## Sistemas lineares

Denomina-se sistema linear de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

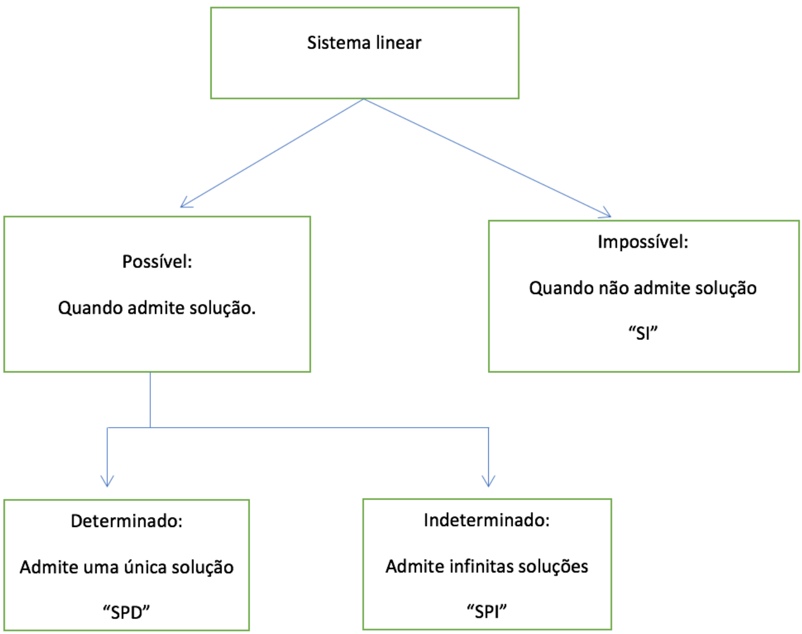
em que $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ são números reais.

Se o conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisfizer todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b_1 = \ldots = b_m = 0$ o sistema linear será dito homogêneo.

Dois sistemas lineares que admitem o mesmo conjunto solução são ditos equivalentes.

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções:



A regra de Cramer é empregada para resolver um sistema linear em que p número de equações é igual ao número de incógnitas. Seja o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

- O determinante da matriz principal

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- O determinante que se obtém de $D_A$ substituindo a 1ª coluna (dos coeficientes de $x$) pela coluna dos termos independentes.

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



- O determinante que se obtém de $D_A$ substituindo a 2ª coluna (dos coeficientes de $y$) pela coluna dos termos independentes.

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

- O determinante que se obtém de $D_A$ substituindo a 3ª coluna (dos coeficientes de $z$) pela coluna dos termos independentes.

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Se $D_A \neq 0$, então o sistema é possível e determinado. Obtemos os valores de $x, y$ e $z$ através das seguintes relações:

$$x = \frac{D_x}{D_A};\ y = \frac{D_y}{D_A};\ z = \frac{D_z}{D_A}$$

**Exercício resolvido**

Com relação ao sistema

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{2x-y}{3z+2}=\frac{z+1}{2x+y}=1 \end{cases}$, onde $3z+2 \neq 0$ e $2x+y \neq 0$ pode-se, com certeza, afirmar que:

**a)** É impossível

**b)** É indeterminado

**c)** Possui determinante igual a 4

**d)** Possui apenas a solução trivial

**e)** É homogêneo

**Resolução**

Podemos separar a segunda igualdade em duas:

$$2x-y=3z+2 \Rightarrow 2x-y-3z=2$$
$$2x+y=z+1 \Rightarrow 2x+y-z=1$$

Temos então três equações:

$$x+y+z=1$$
$$2x-y-3z=2$$
$$2x+y-z=1$$

Que podem ser associadas à matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Vamos calcular seu determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

*Det = 1.(-1).(-1) + 1.(-3).2 + 1.2.1 – 2.(-1).1 – 1.(-3).1 – (-1).2.1*

*Det = 1 – 6 + 2 +2 + 3 + 2*

*Det = 4*

**Resposta: C**

### Análise combinatória

As primeiras atividades matemáticas da humanidade estavam ligadas à contagem de objetos de um conjunto, enumerando seus elementos.

Vamos estudar aqui algumas técnicas para a descrição e contagem de todos os casos possíveis de um acontecimento.

- Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O princípio fundamental da contagem diz que um evento que ocorre em n situações independentes e sucessivas, tendo a primeira situação ocorrendo de m1 maneiras, a segunda situação ocorrendo de m2 maneiras e assim sucessivamente até a **n-ésima** situação ocorrendo de mn maneiras, temos que o número total de ocorrências será dado pelo produto: $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$

**Exemplos:**

Quantos são os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5?



*Como o zero à esquerda de um número não é significativo, para que tenhamos um número natural com dois algarismos ele deve começar com um dígito de **1** a **9**, temos portanto **9** possibilidades.*

*Para que o número seja um múltiplo de 5, o mesmo deve terminar em **0** ou **5**, portanto temos apenas 2 possibilidades. A multiplicação de **9** por **2** nos dará o resultado desejado. Logo, são 18 os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5.*

Eu possuo 4 pares de sapatos e 10 pares de meias. De quantas maneiras poderei me calçar utilizando um par de meias e um de sapatos?

*Pelo princípio fundamental da contagem temos que multiplicar **4**, que é o número de elementos do primeiro conjunto, por **10** que corresponde ao número de elementos do segundo conjunto.*

*Portanto, poderei me calçar de 40 maneiras diferentes.*

De quantas formas podemos dispor as letras da palavra FLÚOR de sorte que a última letra seja sempre a letra R?

*Para a última letra, segundo o enunciado temos apenas uma possibilidade que é a letra R.*

*Para a primeira, segunda, terceira e quarta letras temos respectivamente 4, 3, 2 e 1 possibilidades. Assim temos: 4.3.2.1 = 24*

*Note que este exemplo é semelhante ao caso dos livros, explicado no início da página, só que neste caso teríamos mais um livro, digamos de ciências, que sempre seria colocado na pilha por último. Podemos dispor as letras da palavra FLÚOR de 24 formas diferentes, tal que a última letra seja sempre a letra R.*

Quantos números naturais com 3 algarismos podemos formar que não comecem com 16, nem com 17?

*Neste exemplo iremos fazer o cálculo em duas partes. Primeiro iremos calcular quantos são os números com três algarismos. Como neste caso na primeira posição não podemos ter o dígito zero, o número de possibilidades para cada posição é respectivamente: 9, 10 e 10. Portanto, temos 900 números naturais com três dígitos. Agora vamos calcular quantos deles começam com 16 ou 17.*

*Para a primeira posição temos apenas uma possibilidade, o dígito 1. Para a segunda temos 2, pois servem tanto o dígito 6, quanto o 7. Para a terceira e última posição temos todos os dígitos possíveis, ou seja, 10 possibilidades, multiplicando tudo temos 20. Logo, subtraindo 20 de 900 obtemos 880. Existem 880 números naturais nestas condições.*

- Fatorial

É comum, nos problemas de contagem, calcularmos o produto de uma multiplicação cujos fatores são números naturais consecutivos. Para facilitar esse trabalho, vamos adotar um símbolo chamado fatorial.

Sendo n um número inteiro maior que 1, define-se fatorial de n como o produto do $n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1, sendo\ n \in \mathbb{N}\ e\ n > 1$. Indica-se $n!$.

Por definição, temos:

$0! = 1$
$1! = 1$

Qual deve ser o valor numérico de n para que a equação (n + 2)! = 20 . $n$! seja verdadeira?

*O primeiro passo na resolução deste problema consiste em escrevermos (n + 2)! em função de n!, em busca de uma equação que não mais contenha fatoriais:*

$$(n+2)(n+1)n!=20n!, \text{ dividindo por } n!, \text{ temos:}$$
$$(n+2)(n+1)=20, \text{ fazendo a distributiva}$$
$$n^2+3n+2=20 \Rightarrow n^2+3n-18=0$$

*Rapidamente concluímos que as raízes procuradas são -6 e 3, mas como não existe fatorial de números negativos, já que eles não pertencem ao conjunto dos números naturais, ficamos apenas com a raiz igual a 3.*

*Portanto:*

*O valor numérico de n para que a equação seja verdadeira é igual a 3.*

A partir de fatoriais, obtenha uma sequência com sete números compostos consecutivos.



*Como eu devo obter 7 números compostos consecutivos na sequência, eu preciso partir ao menos de 8!:*

*8! = 8 . 7 . 6. 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40320*

*Como 8! é igual a 40320, o primeiro número da sequência será 40320 + 2 = 40322 e o último será 40320 + 8 = 40328.*

*Logo: A sequência 40322, 40323, 40324, 40325, 40326, 40327 e 40328 satisfaz as condições do enunciado.*

- Arranjo simples

Denomina-se arranjo simples dos n elementos de E, p a p, toda sequência de p elementos distintos de E.

Para calcular o número de arranjos dispomos da seguinte fórmula:

$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ onde $p \leq n$.

Qual o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra PADRINHO?

*Neste exemplo temos um arranjo simples com 8 elementos agrupados 8 a 8. Calculemos então* $A_{8,8}$:

Qual o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra PADRINHO?

*Neste exemplo temos um arranjo simples com 8 elementos agrupados 8 a 8. Calculemos então $A_{8,8}$:*

$$A_{8,8} = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{1} = 40320$$

*Portanto:*

*Podemos formar 40320 anagramas com as letras da palavra PADRINHO.*

Em uma escola está sendo realizado um torneio de futebol de salão, no qual dez times estão participando. Quantos jogos podem ser realizados entre os times participantes em turno e returno?

*Como o campeonato possui dois turnos, os jogos **Equipe A x Equipe B** e **Equipe B x Equipe A** tratam-se de partidas distintas, então estamos trabalhando com **arranjos simples** onde importa a ordem dos elementos. Devemos calcular $A_{10,\,2}$:*

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10.9.8!}{8!} = 10.9 = 90$$

*Então:*

*Podem ser realizados 90 jogos entre os times participantes.*

Otávio, João, Mário, Luís, Pedro, Roberto e Fábio estão apostando corrida. Quantos são os agrupamentos possíveis para os três primeiros colocados?

*Obviamente, como em qualquer corrida, a ordem de chegada é um fator diferenciador dos agrupamentos. Como temos 7 corredores e queremos saber o número de possibilidades de chegada até a terceira posição, devemos calcular $A_{7,\,3}$:*

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 210$$

*Logo:*

*210 são os agrupamentos possíveis para os três primeiros colocados.*

- Permutação simples

Seja E um conjunto com n elementos. Chama-se permutação simples dos n elementos, qualquer agrupamento (sequência) de n elementos distintos de E.

Podemos, também, interpretar cada permutação de n elementos como um arranjo simples de n elementos tomados $n$ a $n$, ou seja, $p = n$.

$P_n = n!$

- Permutação com elementos repetidos

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\gamma!}$$

Quantos anagramas podemos formar a partir da palavra ORDEM?

*Um anagrama é uma palavra ou frase formada com todas as letras de uma outra palavra ou frase. Normalmente as palavras ou frases resultantes são sem significado, como já era de se esperar.*

*Como a palavra ORDEM possui **5** letras distintas, devemos calcular o número de permutações calculando P5. Temos então:*

$P5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

*Portanto:*

*O número de anagramas que podemos formar a partir da palavra ORDEM é igual 120.*

Na fila do caixa de uma padaria estão três pessoas. De quantas maneiras elas podem estar posicionadas nesta fila?

*Temos que calcular P3, então:*

$P3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

*Logo:*

*As três pessoas podem estar posicionadas de seis maneiras diferentes na fila.*

Quantos são os anagramas que podemos formar a partir das letras da palavra ERVILHAS, sendo que eles comecem com a letra E e terminem com vogal?

*Como na primeira posição sempre teremos a letra E, o número de possibilidades nesta posição é igual a 1, podemos até dizer que é igual a* $P_1$.

*Para a última posição temos disponíveis as letras I e A, pois a letra E já está sendo utilizada no começo, então para a oitava letra temos que calcular* $P_2$:

$P_2 = 2! = 2 . 1 = 2$

*Como para as demais posições temos 6 letras disponíveis, calculemos então* $P_6$:

$P_6 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$

*Multiplicando tudo:*

$1 . 720 . 2 = 1440$

*Então:*

*A partir da palavra ERVILHAS podemos formar 1440 anagramas que comecem com a letra E e terminem em vogal.*



Quantos anagramas podemos obter a partir das letras da palavra PARAR?

*Como a palavra PARAR possui 5 letras, mas duas delas são repetidas duas vezes cada, na solução do exemplo vamos calcular* $P_5^{(2,2)}$:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!\,2!} = 30$$

*Portanto:*

*O número de anagramas que podemos formar a partir das letras da palavra PARAR é igual a 30.*

Possuo 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Pretendo colocá-las em um tubo acrílico translúcido e incolor, onde elas ficarão umas sobre as outras na vertical. De quantas maneiras distintas eu poderei formar esta coluna de bolas?

*Neste caso de permutação com elementos repetidos temos um total de* ***10*** *bolas de quatro cores diferentes. Segundo a repetição das cores, devemos calcular* $\boldsymbol{P_{10}^{(4,3,2)}}$:

$$P_{10}^{4,3,2} = \frac{10!}{4!\,3!\,2!} = 12600$$

*Então:*

*Eu poderei formar esta coluna de bolas de 12600 maneiras diferentes.*

- Combinação simples

Chama-se combinação simples dos n elementos de E, p a p, todo subconjunto de E com p elementos.

Indica-se o número dessas combinações simples por $C_{n,p}$ ou $C_n^p$.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Com 12 bolas de cores distintas, posso separá-las de quantos modos diferentes em saquinhos, se o fizer colocando 4 bolas em cada saco?

*Como a ordem das bolas não causa distinção entre os agrupamentos, este é um caso de combinação simples. Vamos então calcular $C_{12,4}$:*

$$C_{12,4} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = \frac{12!}{4!\,8!} = 495$$



*Portanto:*

*Posso separá-las de 495 modos diferentes.*

Um fabricante de sorvetes possui à disposição 7 variedades de frutas tropicais do nordeste brasileiro e pretende misturá-las duas a duas na fabricação de sorvetes. Quantos serão os tipos de sorvete disponíveis?

*Os sorvetes de umbu com siriguela e de siriguela com umbu, na verdade tratam-se de um mesmo tipo de sorvete, não havendo distinção apenas pela ordem da escolha das frutas utilizadas. Temos um caso de combinação simples que será resolvido através do cálculo de $C_{7,2}$:*

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21$$

*Logo: Serão disponíveis 21 sabores diferentes.*

As 14 crianças de uma família serão separadas em grupos de 5, para que elas arrecadem prendas para a quermesse da fazenda onde vivem. De quantas maneiras as crianças poderão ser agrupadas?

*Identificamos neste exemplo um caso de combinação simples, pois a ordem das crianças é irrelevante, não causando distinção entre os agrupamentos com elementos distintos. Vamos calcular $C_{14,5}$:*

$$C_{14,5} = \frac{14!}{5!\,(14-5)!} = \frac{14!}{5!\,9!} = 2002$$

*Então: As crianças poderão ser agrupadas de 2002 maneiras diferentes.*

## PROBABILIDADE

A que temperatura a água entra em ebulição? Se largarmos uma bola, com que velocidade ela atinge o chão? Conhecidas certas condições, é perfeitamente possível responder a essas duas perguntas, antes mesmo da realização desses experimentos.

Esses experimentos são denominados determinísticos, pois neles os resultados podem ser previstos.

Considere agora os seguintes experimentos:

- No lançamento de uma moeda, qual a face voltada para cima?
- No lançamento de um dado, que número saiu?
- Uma carta foi retirada de um baralho completo. Que carta é essa?



Mesmo se esses experimentos forem repetidos várias vezes, nas mesmas condições, não poderemos prever o resultado.

Um experimento cujo resultado, mesmo que único, é imprevisível, é denominado experimento aleatório. E são esses que nos atrai neste estudo. Um experimento ou fenômeno aleatório apresenta as seguintes características:

- Pode se repetir várias vezes nas mesmas condições;
- É conhecido o conjunto de todos os resultados possíveis;
- Não se pode prever o resultado.

A teoria da probabilidade surgiu para nos ajudar a medir a “chance” de ocorrer determinado resultado num experimento aleatório.

- **Espaço amostral**

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado espaço amostral, indicado por Ω ou U.

- No lançamento de uma moeda: $U=\{cara, coroa\}$.

- No lançamento de um dado: $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- No nascimento de uma criança: $U=\{menino, menina\}$.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento. No lançamento de um dado, por exemplo, em relação à face voltada para cima, podemos ter os eventos:

- O número par: $\{2, 4, 6\}$.
- O número ímpar: $\{1, 3, 5\}$.
- Múltiplo de 8: $\{\ \}$

- **Probabilidade de um evento em um espaço amostral finito**

Considere um experimento aleatório em que para cada um dos $n$ eventos simples, do espaço amostral $U$, a chance de ocorrência é a mesma. Nesse caso, dizemos que o espaço amostral é um espaço equiprovável e que a probabilidade de cada evento simples é $\frac{1}{n}$

Para um evento simples A, indicamos:

Podemos ampliar essas definições de probabilidade de um evento simples para a probabilidade de um evento qualquer.

Na expressão acima, $n(U)$ é o número de elementos do espaço amostral U e $n(A)$, o número de elementos do evento $A$.

**Observação:**

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}$$

Sejam $A$ e $A$ dois eventos complementares de um espaço amostral U, então:

$$P(A)+P(A)=1$$

Probabilidade com reunião e intersecção de eventos

$$P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

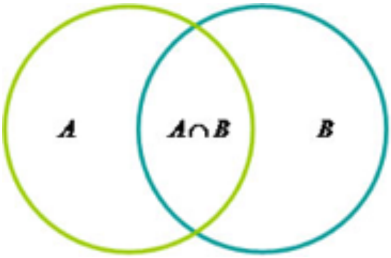
**Exemplo:**

Numa pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas leem o jornal A, 180 leem o jornal B e 60 leem os jornais A e B. Escolhendo um dos entrevistados ao acaso, qual a probabilidade de que ele seja:

**a)** Leitor dos jornais A e B?

**b)** Leitor do jornal A ou do jornal B?

**a)** Temos o seguinte:




Onde:

**A:** leitores apenas do jornal $A$, $A = 190$

**B:** leitores apenas do jornal $B$, $B = 120$

A∩B: leitores dos jornais $A$ e $B$, $A \cap B = 60$

Como 60 pessoas leem os jornais A e B, marcamos 60 na intersecção de A com B. Se 250 leem o jornal A, marcamos 190 (250 – 60) na parte de A que não está em B, e 120 (180 – 60) na parte de B que não está em A. Como foram consultadas 470 pessoas e já marcamos 370 (190 + 60 + 120 = 370), concluímos que 100 pessoas não leem nenhum dos dois jornais. Assim, a probabilidade de que a pessoa leia os dois jornais, A e B, é:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{60}{470} = \frac{6}{47}, logo, P(A \cap B) = \frac{6}{47}$$

**b)** Quando somamos o número de pessoas que leem o jornal A com o número de pessoas que leem o jornal B, contamos duas vezes aquelas que leem os dois jornais.

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{250}{470} + \frac{180}{470} - \frac{60}{470}$$

$$P(A \cup B) = \frac{370}{470} = \frac{37}{47}$$

- **Probabilidade condicional**

Vamos supor o experimento do lançamento de dois dados, um branco e um vermelho. Considere os eventos:

**A:** a soma dos números obtidos é menor que 7;

**B:** sair o número 4 em, pelo menos , um dado.

O espaço amostral U é:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

**Os eventos são:**

**A** = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)}

**B** = {(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 4)}



Vamos calcular, agora, a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser menor que 7 e, num dos dados, pelos, sair o número 4.

Note que queremos a ocorrência de somas menores do que 7 em um universo cujos elementos apresentem um número 4.

Nesse caso, dizemos que a ocorrência do evento A está condicionada à ocorrência do evento B, indicamos por A/B, ou seja, a ocorrência do evento A sabendo que B vai ocorrer ou já ocorreu. (Os eventos A e B são dependentes).

Essa probabilidade é chamada probabilidade condicional ou probabilidade de A dado B.

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Voltando ao exemplo, temos que:

$$A \cap B = \{(1,4), (2,4), (4,1), (4,2)\}$$

Sendo $n(B) = 11$ e $n(A \cap B) = 4$, obtemos:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{11}$$

- Dois eventos, A e B, são ditos independentes quando $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

**Exercício resolvido**

Pedro pergunta a Paulo se ele pode trocar uma nota de R$ 100,00 por duas notas de R$ 50,00. Paulo responde que tem exatamente R$ 200,00 na carteira em notas de R$ 50,00, R$ 20,00 e R$ 10,00, mas não sabe quantas notas tem de cada valor. Sabe apenas que tem pelo menos uma de cada valor. Considere que todas as distribuições possíveis de notas de R$ 50,00, R$ 20,00 e R$ 10,00 que podem ocorrer na carteira de Paulo sejam igualmente prováveis. A probabilidade de que Paulo possa fazer a troca pedida por Pedro é de:

**a)** 2/13

**b)** 4/13

**c)** 5/13

**d)** 6/13

**e)** 7/13



**Resolução:**

Sabemos que para calcular probabilidade, basta dividirmos o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.

Como ele tem pelo menos uma nota de cada, então ele consegue formar 80,00 com uma de 10, uma de 20 e uma de 50.

Temos que saber como podemos formar os outros 120,00. Vamos dividir em casos:

– Se ele não possuir mais notas de 50, teremos que formar 120,00 com notas de 10 e 20:

São 7 opções: 12 notas de 10; 1 de 20 e 10 de 10; 2 de 20 e 8 de 10; 3 de 20 e 6 de 10; 4 de 20 e 4 de 10; 5 de 20 e 2 de 10; 6 de 20.

Se ele possuir mais uma nota de 50, teremos que formar 70,00 com notas de 10 e 20:

São 4 opções: 7 notas de 10; 1 de 20 e 5 de 10; 2 de 20 e 3 de 10; 3 de 20 e 1 de 10.

– Se ele possuir mais duas notas de 50, teremos que formar 20,00 com notas de 10 e 20:

São 2 opções: 1 de 20 ou 2 de 10.

Verificamos que o número de casos possíveis é 7 + 4 + 2 = 13

Para contarmos o número de casos favoráveis, devemos considerar as opções onde ele tem pelo menos duas notas de 50, ou seja, 4 + 2 = 6.

Probabilidade = 6/13

**Exercício resolvido**

Para disputar a final de um torneio internacional de natação, classificaram-se 8 atletas: 3 norte-americanos, 1 australiano, 1 japonês, 1 francês e 2 brasileiros. Considerando que todos os atletas classificados são ótimos e têm iguais condições de receber uma medalha (de ouro, prata ou bronze), a probabilidade de que pelo menos um brasileiro esteja entre os três primeiros colocados é igual a:



**a)** 5/14

**b)** 3/7

**c)** 4/7

**d)** 9/14

**e)** 5/7

**Resolução**

Quando aparecer na questão "pelo menos um", devemos encontrar a probabilidade de não acontecer nenhum, ou seja, de não termos brasileiros no pódio, e depois diminuirmos de 1.

Probabilidades:

De nenhum brasileiro ganhar ouro = 6/8 = 3/4

De nenhum brasileiro ganhar prata = 5/7 (desconsideramos a medalha de ouro)

De nenhum brasileiro ganhar bronze = 4/6 = 2/3 (desconsideramos as medalhas de ouro ou prata)

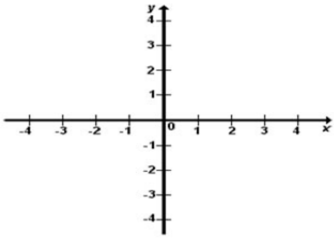
Então:

P (não termos brasileiros no pódio) = 3/4 x 5/7 x 2/3 = 5/14

P (termos pelo menos um brasileiro no pódio) = 1 – 5/14 = 14/14 – 5/14 = 9/14

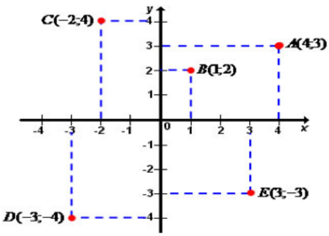
- **Coordenadas cartesianas no plano**

Um plano cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares, onde o encontro entre ele é chamado de origem. O eixo horizontal é chamado de eixo x e o eixo vertical chamado de eixo y. No eixo x, à direita da origem é a parte positiva do eixo, e a parte da esquerda é a parte negativa. No eixo y, a parte de cima da origem é a parte positiva do eixo y, e a parte de baixo da é a parte negativa. Observe a figura abaixo:



Uma coordenada no plano cartesiano é chamada de ponto, formado por uma coordenada x e uma coordenada y. Por exemplo, o ponto (1,3) tem coordenada x=1 e coordenada y=3, e também o ponto (-4,2) tem coordenada x=-4 e coordenada y=2

Esses pontos são determinados planos pela intersecção entre a reta ortogonal a x, passando pela coordenada x do ponto com a reta ortogonal a y passando pela coordenada y do mesmo ponto. Observe a figura abaixo.



Podemos observar na figura acima quatro pontos determinados no plano cartesiano, são eles: os ponto $A(4,3)$, $B(1,2)$, $C(-2,4)$, $D(-3,-4)$ e $E(3,-3)$.

Agora que sabemos como é formado um ponto no plano cartesiano, podemos calcular a distância entre esses pontos.

- **Distância entre dois pontos**

Sejam dois pontos, o ponto $A(x_1,y_1)$ e o ponto $B(x_2,y_2)$, então a distância entre os pontos A e B, é dada por

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Exercício resolvido**

**1.** A distância entre os pontos $A(-2,y)$ e $B(6,7)$ é 10. Qual o valor de $y$?

**Resolução**

Usando a fórmula para o calculo entre dois pontos temos que

$$d(A,B) = \sqrt{(6-(-2))^2 + (7-y)^2} = \sqrt{8^2+(7-y)^2} = \sqrt{64+49-14y+y^2} = \sqrt{y^2-14y+113},$$



como $d(A,B)= 10$ também, então temos que

$$\sqrt{y^2-14y+113} = 10 \Rightarrow y^2-14y+113 = 100 \Rightarrow y^2-14y+13 = 0,$$

usando Bhaskara, temos duas respostas, $y=1$ ou $y=13$.

- **Equação da reta**

Seja $r$ uma reta qualquer, então a equação de $r$ será, $y=ax+b$ ou podemos escrever $y-ax-b=0$, onde a é chamado de coeficiente angular da reta, e b de coeficiente linear da reta. Como $x$ e y variam dependendo do ponto dado, então precisamos encontrar as constantes a e b. Para isso precisamos de dois pontos, ou seja, toda reta pode ser definida por dois pontos. Seja então dois pontos, $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$, dessa forma, substituindo as coordenadas dos pontos na equação da reta temos que:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações temos, $(y_1-y_2) = a(x_1-x_2) \Rightarrow a = \frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}$, assim temos que $y = \frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}x + b$, substituindo o ponto a em $x$ e $y$ nesta equação temos que, $y_1 = \frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}x_1 + b \Rightarrow b = \frac{y_1(x_1-x_2)}{x_1(y_1-y_2)}$, logo temos que a equação da reta determinada por dois pontos será $y = \frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}x + \frac{y_1(x_1-x_2)}{x_1(y_1-y_2)}$.

### Exercício resolvido

**1.** Qual a equação da reta que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(2,-4)$.

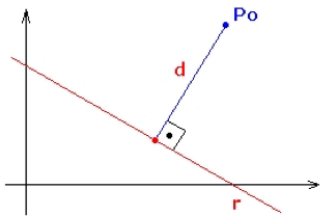
### Resolução

$\begin{cases} 2 = a1 + b \\ -4 = a2 + b \end{cases}$, subtraindo as duas equações temos que,

$6=a(-1) \Longrightarrow a=-6$, desta forma a equação fica $y=-6x+b$, substituindo o ponto $A$ na equação obtemos $2=-6.1+b \Longrightarrow b=2+6 \Longrightarrow b=8$, logo a equação da reta é $y=-6x+8$.

- **Distância entre um ponto e uma reta**

Como fizemos antes, quando definimos pontos, calculamos a distância entre dois pontos, agora que sabemos o que são pontos e retas podemos também calcular a distância entre um ponto e uma reta. A distância entre um ponto e uma reta é dada pelo comprimento do segmento que liga o ponto com a reta, mas é perpendicular à reta. Observe a figura abaixo, temos que d é a distância entre o ponto $P_o$ e a reta $r$:




Seja então o ponto $P_o$ de coordenadas $(x_1,y_1)$, e r com equação $ax+by+c$. Então a distância d entre o ponto $P_o$ e a reta $r$ é dada por,

$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

### Exercício resolvido

**1.** Seja a reta $r$ de equação $y+6x-8=0$, e o ponto $P_o(6,7)$. Qual a distância entre a reta r e o ponto $P_o$?

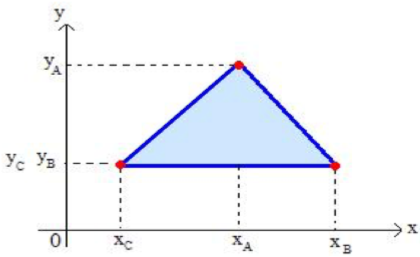
## Resolução

Usando a fórmula de distância entre ponto e reta, temos que a distância d entre a reta r e o ponto $P_o$ é, $d = \frac{6.6+1.7-8}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{36-1}{\sqrt{37}} = \frac{35\sqrt{37}}{37}$, logo a distância entre a reta r e o ponto $P_0$ é $\frac{35\sqrt{37}}{37}$.

## Calculo de área com GA

- Área de triângulo com GA

Um triângulo como já vimos antes é formado por três lados, três ângulos e três vértices. Cada vértice de um triângulo é um ponto, se tivermos esses pontos no plano cartesiano, conseguimos calcular sua área facilmente. Então tome três pontos no plano

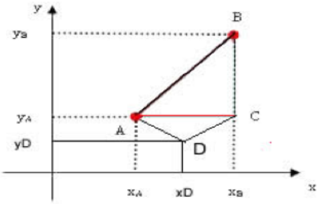



o ponto $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$, então a área do triângulo é dada por, $A=\frac{|D|}{2}$, onde $D$ é o determinante da matriz

$$\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}$$

- Área de quadrilátero com GA

Da mesma forma do triângulo, podemos ter um quadrilátero em um plano cartesiano, determinado pelos seus quatro pontos ou vértices.




e desta forma também, temos que a área do quadrilátero ABCD é dada por $A = \frac{1}{2}|D_1| + \frac{1}{2}|D_2|$, onde $D_1$ é o determinante da matriz $\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$, e $D_2$ é o determinante da matriz $\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{pmatrix}$.

### Exercício resolvido

**1.** Calcule a coordenada x do ponto $A(x,1)$ e do ponto $B(x,2)$ sabendo que as coordenadas do ponto $C$ são $(4,2)$, que eles não são colineares e que a área do triângulo formado por eles é igual a 3.

### Resolução

Utilizando a fórmula para cálculo de área dada anteriormente, vamos primeiro então calcular o determinante de $\begin{array}{ccc} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}$.

Calculando o determinante temos que $D=-4+x$, dessa forma temos que $A = \frac{|D|}{2}$, ou seja, $3=\frac{|-4+x|}{2} \Longrightarrow 6 = |-4+x|$, isto é, $x=10$ ou $x = -2$.

- **Retas paralelas e perpendiculares**

Vamos agora ver a posição de duas retas no plano, para isso queremos saber o ângulo formado entre as duas retas, ou seja, precisamos observar o coeficiente angular da reta. Então vamos ver a diferença dos coeficientes angulares de retas paralelas para duas retas perpendiculares.

- Retas paralelas

Se duas retas são paralelas, então queremos que as suas inclinações sejam as mesmas, isto é, seus coeficientes angulares devem ser os mesmos. Sejam as retas $r$ e $s$ tal que $r$: $a_1\,x+b_1$ e a reta $s$: $y=a_2\,x+b_2$, dizemos que r é paralela à s se $a_1=a_2$. Se $a_1 \neq a_2$, então $r$ e $s$ se intersectam em um ponto, daí dizemos que as retas são concorrentes.

- Retas perpendiculares

Sejam duas retas concorrentes, dizemos que as duas retas são perpendiculares se o ângulo formado entre elas for um ângulo de 90°. Sejam as retas $r$ e $s$ tal que $r$: $y=a_1\,x+b_1$ e a reta s: $y=a_2\,x+b_2$, dizemos que r é perpendicular à s se $a\_1=\frac{1}{a_2}$, ou seja, o coeficiente angular da reta $r$ deve ser o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $s$.

**Exercício resolvido**

**1.** Das equações de retas abaixo, a única que é perpendicular a $2x+3y+4=0$ é:

**a)** $y = 3x+2$

**b)** $y = \quad x+2$

**c)** $y = -\frac{2}{3}x-3$

**d)** $y = \quad x+1$

**e)** $y = -\frac{3}{2}x+4$



**Resolução**

Vamos escrever a reta $2x+3y+4=0$ na forma reduzida, assim temos que $y=-\frac{3}{2}-\frac{4}{3}$ , logo o coeficiente angular da reta perpendicular a ela deve ser $\frac{3}{2}$, logo a equação da reta perpendicular a ela é $y = \frac{3}{2}x+1$, ou seja, **opção d)**.

# QUESTÕES COMPLEMENTARES
# ENEM

## Questão 01 – ENEM

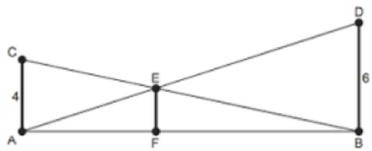
A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:

**a)** 30 cm
**b)** 45 cm
**c)** 50 cm
**d)** 80 cm
**e)** 90 cm

## Questão 02 – ENEM



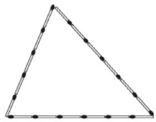
O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados. Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?




**a)** 1 m
**b)** 2 m
**c)** 2,4 m
**d)** 3 m
**e)** $2\sqrt{6}$ m

### Questão 03 – ENEM

Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

**a)** 3

**b)** 5

**c)** 6

**d)** 8

**e)** 10



### Questão 04 – ENEM

Diariamente, uma residência consome 20160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome. Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

**a)** Retirar 16 células

**b)** Retirar 40 células

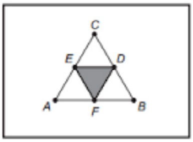
**c)** Acrescentar 5 células

**d)** Acrescentar 20 células

**e)** Acrescentar 40 células

## Questão 05 – ENEM

Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero $ABC$ de lado $1$ *metro*. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios $D$, $E$ e $F$ dos lados $BC$, $AC$ e $AB$ respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.




Qual é a medida da área pintada, metros quadrados, do retângulo DEF?

**a)** $\frac{1}{16}$

**b)** $\frac{\sqrt{3}}{16}$

**c)** $\frac{1}{8}$

**d)** $\frac{\sqrt{3}}{8}$

**e)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$



## Questão 06 – ENEM

Um construtor precisa revestir o piso de uma sala retangular. Para essa tarefa, ele dispõe de dois tipos de cerâmicas:

**I.** Cerâmica em forma de quadrado de lado $20\ cm$ que custa $R\$\ 8{,}00$ por unidade;

**II.** Cerâmica em forma de triângulo retângulo isósceles de catetos com $20\ cm$ que custa $R\$\ 6{,}00$ por unidade.

A sala tem largura de $5\ m$ e comprimento de $6\ m$. O construtor deseja gastar a menor quantia possível com a compra de cerâmica. Sejam $x$ o número de peças de cerâmica de forma quadrada e y o número de peças de cerâmica de forma retangular. Isso significa, então, encontrar valores para $x$ e $y$ tais que $0{,}004x + 0{,}02y \geq 30$ e que tomem o menor possível valor de:

**a)** $8x + 6y$

**b)** $6x + 8y$

**c)** $0{,}32x + 0{,}12y$

**d)** $0{,}32x + 0{,}02y$

**e)** $0{,}04x + 0{,}12y$

### Questão 07 – ENEM

Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão. O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é:

**a)** 4
**b)** 8
**c)** 9
**d)** 12
**e)** 20



### Questão 08 – ENEM

Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio. (Use 3 para aproximação de $\pi$). Qual é a distância percorrida por este homem em sua caminhada diária?

**a)** 0,30 km
**b)** 0,75 km
**c)** 1,50 km
**d)** 2,25 km
**e)** 4,50 km

### Questão 09 – ENEM

Uma fábrica de formicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas. Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada. A quantidade x, de placas do novo modelo, em cada caixa será igual a:

**a)** $\frac{N}{9}$
**b)** $\frac{N}{6}$
**c)** $\frac{N}{3}$
**d)** $3N$
**e)** $9N$

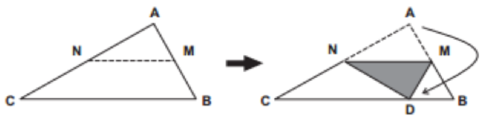
### Questão 10 – ENEM

A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça. Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em:

**a)** 4%
**b)** 20%
**c)** 36%
**d)** 64%
**e)** 96%

### Questão 11 – ENEM

Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.




Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos:

**a)** CMA e CMB

**b)** CAD e ADB

**c)** NAM e NDM

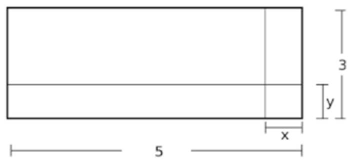
**d)** CND e DMB

**e)** CND e NDM



### Questão 12 – ENEM

Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento $(x)$ no comprimento e $(y)$ na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.




Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

**a)** $2xy$

**b)** $15 - 3x$

**c)** $15 - 5y$

**d)** $-5y - 3x$

**e)** $5y + 3x - xy$

**Questão 13 – ENEM**

Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m

Terreno 2: 55 m por 55 m

Terreno 3: 60 m por 30 m

Terreno 4: 70 m por 20 m

Terreno 5: 95 m por 85 m

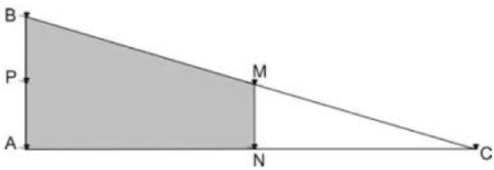
Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno:

**a)** 1
**b)** 2
**c)** 3
**d)** 4
**e)** 5



**Questão 14 – ENEM**

Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calcada corresponde:

**a)** A mesma área do triângulo AMC

**b)** A mesma área do triângulo BNC

**c)** A metade da área formada pelo triângulo ABC

**d)** Ao dobro da área do triângulo MNC

**e)** Ao triplo da área do triângulo MNC

## Questão 15 – ENEM

A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais. Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm x 100 cm). O valor da segunda encomenda será:

**a)** O dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

**b)** Maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.

**c)** A metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

**d)** Menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.

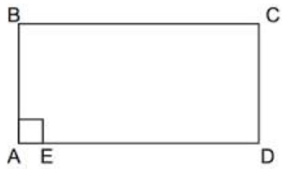
**e)** Igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

## Questão 16 – ENEM

A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metros. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

**Questão 17 – ENEM**

O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que AB = BC/2, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual AE = AB/5 é lado do quadrado.




Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele:

**a)** Duplicasse a medida do lado do quadrado.

**b)** Triplicasse a medida do lado do quadrado.

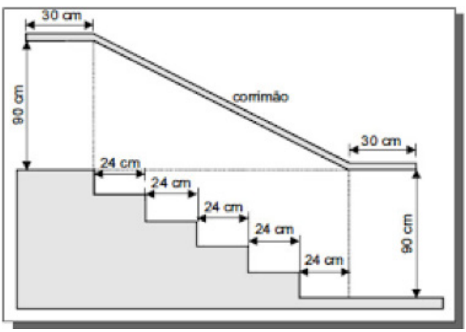
**c)** Triplicasse a área do quadrado.

**d)** Ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.

**e)** Ampliasse a área do quadrado em 4%.



**Questão 18 – ENEM**



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

**a)** 1,8 m

**b)** 1,9 m

**c)** 2,0 m

**d)** 2,1 m

**e)** 2,2 m

### Questão 19 – ENEM

Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga às estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

**a)** No centro do quadrado

**b)** Na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada

**c)** Na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada

**d)** No vértice de um triângulo equilátero de base AB oposto a essa base.

**e)** No ponto médio da estrada que liga as estações A e B

### Questão 20 – ENEM

As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente postos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6370km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente:

**a)** 16 horas

**b)** 20 horas

**c)** 25 horas

**d)** 32 horas

**e)** 36 horas

## Questão 21 – ENEM

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h)=-h_2+22h-85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

| Intervalos de temperatura (°C) | Classificação |
|---|---|
| $T < 0$ | Muito baixa |
| $0 \leq T \leq 17$ | Baixa |
| $17 < T < 30$ | Média |
| $30 \leq T \leq 43$ | Alta |
| $T > 43$ | Muito alta |

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

**a)** Muito baixa

**b)** Baixa

**c)** Media

**d)** Alta

**e)** Muito alta

## Questão 22 – ENEM

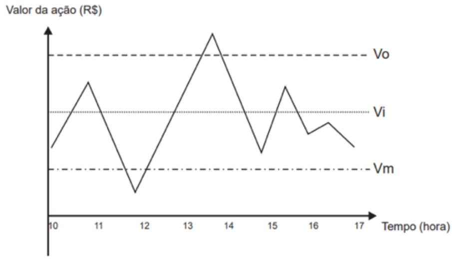
Um investidor inicia um dia com x ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

**I.** Vende metade das ações que possui, assim que seuvalor fica acima do valor ideal $(Vi)$;

**II.** Compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo $(Vm)$;

**III.** Vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo $(Vo)$.

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.




Quantas operações o investidor fez naquele dia?

**a)** 3
**b)** 4
**c)** 5
**d)** 6
**e)** 7



**Questão 23 – ENEM**

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p,$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo:

**a)** R$ 0,50 ≤ p < R$ 1,50
**b)** R$ 1,50 ≤ p < R$ 2,50
**c)** R$ 2,50 ≤ p < R$ 3,50
**d)** R$ 3,50 ≤ p < R$ 4,50
**e)** R$ 4,50 ≤ p < R$ 5,50

### Questão 24 – ENEM

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:


Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

**a)** 9
**b)** 7
**c)** 5
**d)** 4
**e)** 3

### Questão 25 – ENEM

Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em 18, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é:

**a)** 1/8
**b)** 7/8
**c)** 8/7
**d)** 8/9
**e)** 9/8

### Questão 26 – ENEM

De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente:

• 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.

• 33% são utilizados em descarga de banheiro.

• 27% são para cozinhar e beber.

• 15% são para demais atividades. No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia. O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, em algumas atividades.

| Atividade | Consumo total de água na atividade ( em litros) |
|---|---|
| **Tomar banho** | 24,0 |
| **Dar descarga** | 18,0 |
| **Lavar as Mãos** | 3,2 |
| **Escovar os dentes** | 2,4 |
| **Beber e cozinhar** | 22,0 |



Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água:

**a)** 30,0

**b)** 69,6

**c)** 100,4

**d)** 130,4

**e)** 170,0

### Questão 27 – ENEM

Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M". Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

**a)** $S = k \cdot M$

**b)** $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$

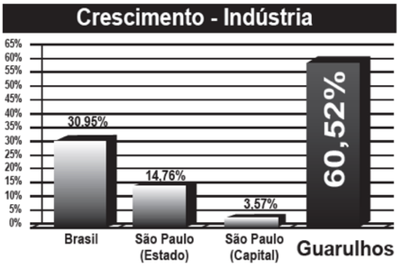
**c)** $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$

**d)** $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$

**e)** $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{2}$

## Questão 28 – ENEM

A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.




Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

**a)** 75,28

**b)** 64,09

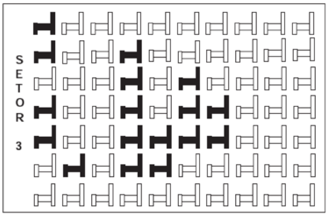
**c)** 56,95

**d)** 45,76

**e)** 30,07

## Questão 29 – ENEM

Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.




A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

**a)** 17/10

**b)** 17/53

**c)** 53/70

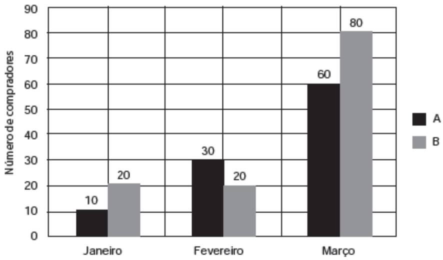
**d)** 5t3/17

**e)** 70/17

**Questão 30 – ENEM**



Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:




A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

**a)** 1/20

**b)** 3/242

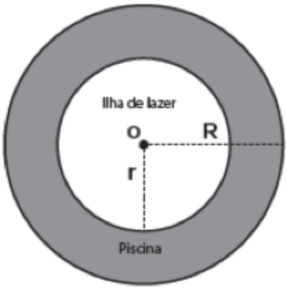
**c)** 5/22

**d)** 6/25

**e)** 7/15

**Questão 31 – ENEM**

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 $m^3$, cuja base tem raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 $m^3$.




Considere 3 como valor aproximado para π. Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de:

**a)** 1,6
**b)** 1,7
**c)** 2,0
**d)** 3,0
**e)** 3,8



**Questão 32 – ENEM**

O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações. Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de:

**a)** R$ 900,00
**b)** R$ 1.200,00
**c)** R$ 2.100,00
**d)** R$ 3.900,00
**e)** R$ 5.100,00

## Questão 33 – ENEM

Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 $m^3$ de concreto. Qual é o volume de cimento, em $m^3$, na carga de concreto trazido pela betoneira?

**a)** 1,75
**b)** 2,00
**c)** 2,33
**d)** 4,00
**e)** 8,00



## Questão 34 – ENEM

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

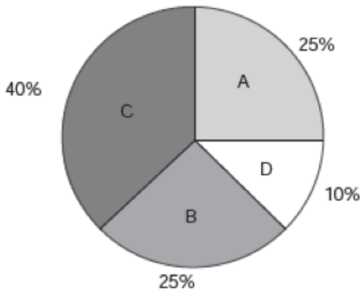
| Empresa | Lucro (em milhões de reais) | Tempo (em anos) |
|---|---|---|
| F | 24 | 3,0 |
| G | 24 | 2,0 |
| H | 25 | 2,5 |
| M | 15 | 1,5 |
| P | 9 | 1,5 |

O empresário decidiu comprar a empresa:

**a)** F
**b)** G
**c)** H
**d)** M
**e)** P

## Questão 35 – ENEM

Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.




O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é:

**a)** 300,00
**b)** 345,00
**c)** 350,00
**d)** 375,00
**e)** 400,00

## Questão 36 – ENEM

Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

**a)** 15,00

**b)** 14,00

**c)** 10,00

**d)** 5,00

**e)** 4,00

**Questão 37 – ENEM**

Numa escola com 1.200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?



**a)** 1/2

**b)** 5/8

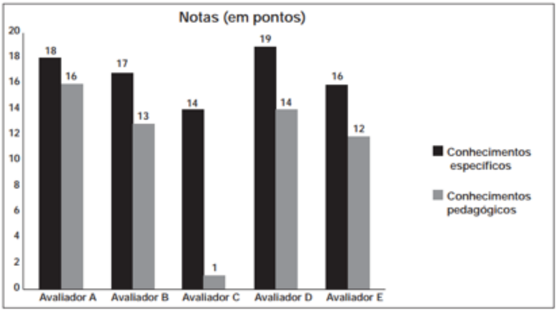
**c)** 1/4

**d)** 5/6

**e)** 5/14

**Questão 38 – ENEM**

As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e, outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.




Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor. A nova média, em relação à média anterior, é:

**a)** 0,25 ponto maior

**b)** 1,00 ponto maior

**c)** 1,00 ponto menor

**d)** 1,25 ponto maior

**e)** 2,00 pontos menor



### Questão 39 – ENEM

Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

**a)** $\frac{62^6}{10^6}$

**b)** $\frac{62!}{10!}$

**c)** $\frac{62!4!}{10!56!}$

**d)** $62! - 10!$

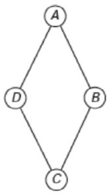
**e)** $62^6 - 10^6$

**Questão 35 – ENEM**

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.




Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

**a)** 6
**b)** 12
**c)** 18
**d)** 24
**e)** 36

**Questão 35 – ENEM**

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão $T(t)=-\frac{t^2}{4}+400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

**a)** 19,0

**b)** 19,8

**c)** 20,0

**d)** 38,0

**e)** 39,0

# GABARITO

| | |
|---|---|
| 01. | **B** |
| 02. | **C** |
| 03. | **A** |
| 04. | **A** |
| 05. | **B** |
| 06. | **A** |
| 07. | **C** |
| 08. | **E** |
| 09. | **A** |
| 10. | **C** |
| 11. | **D** |
| 12. | **E** |
| 13. | **C** |
| 14. | **E** |
| 15. | **B** |
| 16. | **D** |
| 17. | **C** |
| 18. | **D** |
| 19. | **C** |
| 20. | **C** |
| 21. | **D** |
| 22. | **B** |
| 23. | **A** |
| 24. | **E** |
| 25. | **D** |
| 26. | **C** |
| 27. | **D** |
| 28. | **C** |
| 29. | **A** |
| 30. | **A** |
| 31. | **A** |
| 32. | **B** |
| 33. | **B** |
| 34. | **B** |
| 35. | **C** |
| 36. | **E** |
| 37. | **A** |
| 38. | **B** |
| 39. | **A** |
| 40. | **B** |
| 41. | **D** |


Unicesumar
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA